MASTER
NEGATIVE
NO. 95-82355-6

Author:
Broggi, Ugo

Title:
Versicherungsmathematik

Place:
Leipzig

Date:
1911

95-82355-6

MASTER NEGATIVE #

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES

PRESERVATION DIVISION

BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

ORIGINAL MATERIAL AS FILMED - EXISTING BIBLIOGRAPHIC RECORD

Broggi, Ugo, 1880-
Versicherungsmathematik, von Hugo Broggi ...
Deutsche ausgabe. Leipzig, Teubner, 1911.
viii, 360 p. tables. 22½ cm.

Translation of Matematica attuariale.

RESTRICTIONS ON USE:

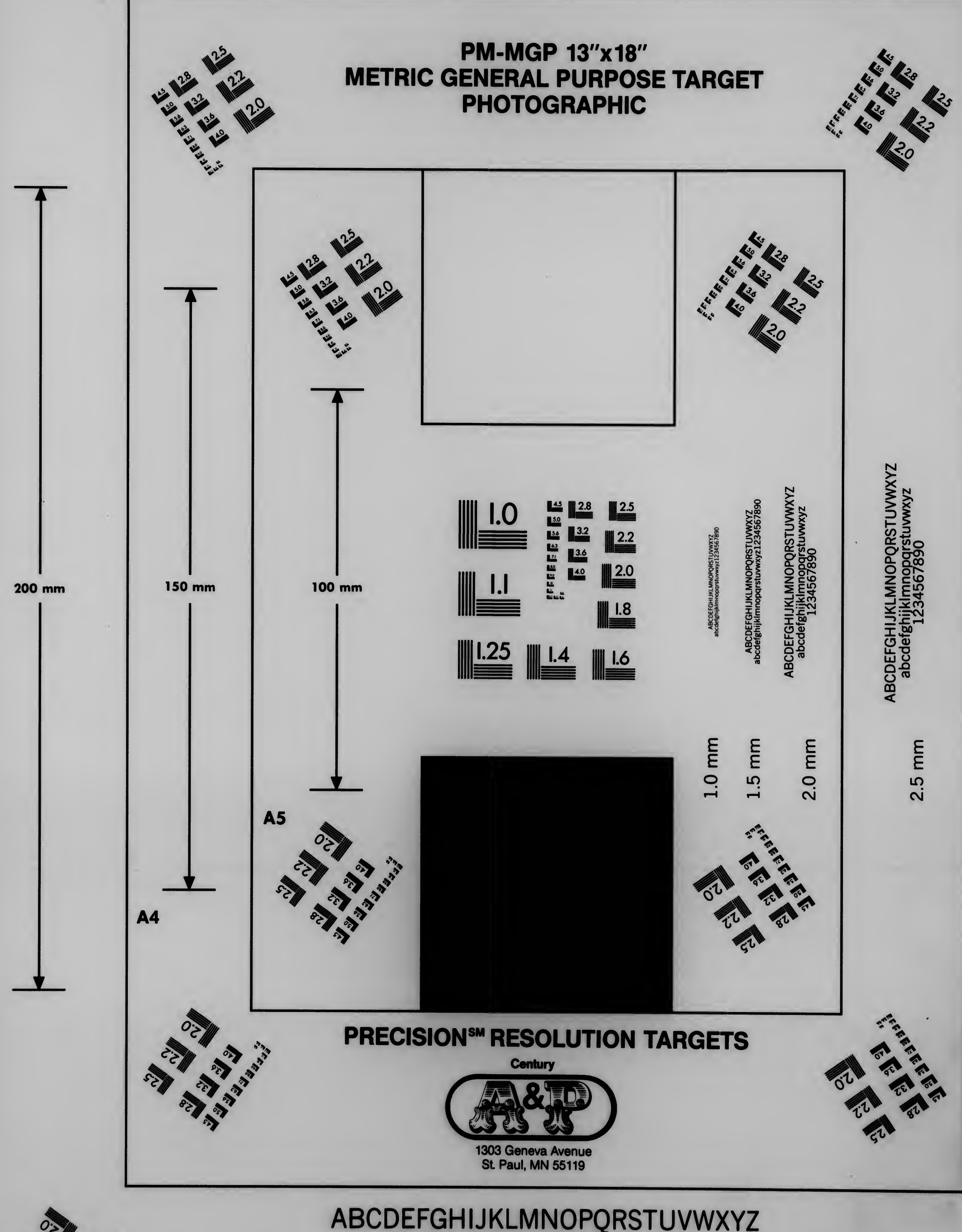
TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35mm REDUCTION RATIO: 12x IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB

DATE FILMED: 2/7/95 INITIALS: DG

TRACKING # : MSH 09379

FILMED BY PRESERVATION RESOURCES, BETHLEHEM, PA.


2.0 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890
1.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890
PM-MGP 13"x18"
METRIC GENERAL PURPOSE TARGET
PHOTOGRAPHIC
200 mm
150 mm
100 mm
A5
A4
A3
1.0 mm
1.5 mm
2.0 mm
2.5 mm
PRECISION℠ RESOLUTION TARGETS
Century
A&P
1303 Geneva Avenue
St. Paul, MN 55119
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890
4.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890
3.5 mm

H. BROGGI

VERSICHERUNGS-MATHEMATIK

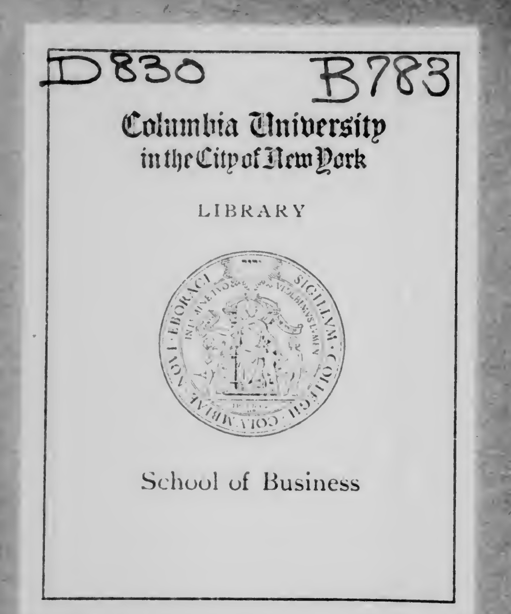
DEUTSCHE AUSGABE




SIGILLVM · COLLEGII · COLVMBIAE · NOVI · EBORACI
IN LVMINE TVO VIDEBIMVS LVMEN

INTENTIONAL SECOND EXPOSURE

6-3 3d12 8—



9/11

VERSICHERUNGSMATHEMATIK

VON

HUGO BROGGI

PROFESSOR AN DEN UNIVERSITÄTEN
BUENOS AIRES UND LA PLATA

DEUTSCHE AUSGABE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

VORWORT.

Das Buch, das die Teubnersche Verlagsbuchhandlung auf Anregung des Herrn Prof. Felix Bernstein in deutscher Fassung veröffentlicht, hat den Charakter und den Inhalt einer für Mathematiker gedachten Vorlesung über Versicherungsmathematik. Es hatte ursprünglich den Zweck, italienische Leser mit der neueren Literatur[1]) des Gegenstandes bekannt zu machen, und setzt außer den gewöhnlichen Kenntnissen über Differential- und Integralrechnung die Fähigkeit voraus, sich in einer knapp gehaltenen Darstellung zu orientieren.

Der Verfasser dankt Herrn Dr. S. Lattes, Professor an der Universität Montpellier, der ihm die Ehre erwies, sein Werkchen ins Französische zu übertragen. Ebenfalls dankt er Herrn Dr. Bernstein, Professor an der Universität Göttingen, Dr. Patzig in Frankfurt a. M. und Dr. Blum in Stuttgart, die ihm durch Ratschläge und in der Revision der Korrekturbogen behilflich gewesen sind.

H. BROGGI.

1) Außer den im Texte angegebenen Schriften hat V. eine *Bohlmann*sche Vorlesung über Theorie des Risikos (Göttingen, W. S. 1899—1900) benutzt.

VORWORT.

Gern folge ich der Aufforderung, der deutschen Übersetzung des Buches von Herrn Broggi über Versicherungsmathematik einige Geleitworte auf den Weg zu geben.

Es ist eine besondere Aufgabe, einen Gegenstand praktischer Art unsern Universitätsstudenten nahe zu bringen. Bei den Bestrebungen der letzten Jahre, dies in mannigfacher Weise zu tun, hat man zuweilen die Schwierigkeiten dieser Aufgabe in schmerzlicher Weise empfinden müssen. Der reine Praktiker kennt die Sache, aber nicht den Studenten, der reine Theoretiker den Studenten, aber nicht die Sache: der eine nur den Patienten, der andere nur die Arznei. Ein bekannter, von seiner Wissenschaft merkwürdig überzeugter Pharmakologe pflegte im Eingang seines Kollegs stets die Wichtigkeit seiner Wissenschaft mit folgendem Vergleich zu illustrieren: Denken Sie sich, meine Herren, zwei Heerführer, der eine kennt das Terrain der Operation vortrefflich, aber kennt nicht die Leistungsfähigkeit seines Heeres; der andere kennt zwar nicht das Terrain, aber er kennt vollkommen seine eigne Armee, sicher wird der letztere siegen; und so wird auch der Arzt, der die Heilmittel kennt, dem Arzt, der nur die Diagnose kennt, überlegen sein. Beweis wie These sind deswegen so schön, weil sie auch das Gegenteil beweisen. Der Feldherr kann seine Truppen, die er gut kennt, in den Sumpf führen, der Pharmakologe ohne Diagnose seinen Patienten vergiften. Zum Erfolg muß man eben beides kennen, die Mittel und das Terrain.

Man muß sich diese Gesichtspunkte vor Augen halten, um die wesentliche Schwierigkeit der Aufgabe und damit das Verdienst eines Buches, wie des vorliegenden, zu würdigen. Herr Broggi ist in der glücklichen Lage, das schwierige Terrain unserer deutschen Universitätsverhältnisse, denen er lange nahe gewesen ist, so gut zu kennen wie die Versicherungspraxis, der er jetzt angehört. Sein Buch findet daher, wie ich glaube, in besonders glücklicher Weise den Ton und das Niveau, das Studierenden der Mathematik, die sich mit Versicherungsmathematik beschäftigen wollen, angemessen ist. Damit dürfte es eine Lücke in der bisherigen Literatur ausfüllen helfen.

FELIX BERNSTEIN.

INHALTSVERZEICHNIS.

Einleitung.

Das fundamentale Problem.

Erster Abschnitt.

Die mathematischen und statistischen Grundlagen.

Kapitel I.

Die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Fehlertheorie.

Kapitel II.

Die statistische Sterblichkeitstheorie.

Dritter Abschnitt.

Die Technik der Lebensversicherung.

Kapitel I.

Die Prämien und die Reserven.

Kapitel II.

Die Gewinne.

Vierter Abschnitt.

Die Theorie des Risikos.

NB.: In der Numerierung der Paragraphen ist im Abschnitt I, Kapitel II, die Nummer 15 übersprungen, im Abschnitt III, Kapitel I, die Nummer 2 zweimal benutzt worden.

Einleitung.

Das fundamentale Problem.

§ 1. 1. Für eine Gesamtheit Γ von Individuen gelte eine nahezu konstante Ausscheideordnung, und die Individuen von Γ seien in dem Sinne ähnlich, daß die Ausscheideordnung dieselbe bleiben würde, falls es möglich wäre, einige oder alle Individuen von Γ durch ein beliebig aus der Gesamtheit herausgegriffenes Individuum zu ersetzen.

Ist dann (r) eine Gruppe von r Individuen, die zu Γ gehören, so werden den verschiedenen Möglichkeiten bezüglich des Ausscheidens von Individuen aus der Gruppe (r) im Laufe einer beliebigen Zeit t verschiedene Zusammensetzungen der Gruppe am Ende dieser Zeit entsprechen. Der erwähnten Möglichkeiten sind es aber endlich viele: wir können sie nach einem willkürlichen Prinzip ordnen und durch die Zahlen 1, 2 ... voneinander unterscheiden. Weiterhin können wir uns einen Versicherer denken, der sich zu der Leistung $c_j(m) \geqq 0$ $(m = 1, 2 \ldots; j = 1, 2 \ldots)$ am Ende der m^{ten} Zeiteinheit verpflichtet, falls der Zustand j der Gruppe zu dieser Zeit vorhanden ist, und welcher dadurch die Berechtigung erwirbt, am Anfang der m^{ten} Zeiteinheit von der Gruppe die Summe $\pi_i(m) \geqq 0$ zu erheben, falls zur Zeit der Einzahlung der Modus i der Gruppe $(i = 1, 2 \ldots)$ vorhanden ist.

Das Verhältnis zwischen Versicherer und Gruppe denken wir uns so weit fortgesetzt, als nicht alle Individuen aus der Gruppe ausgeschieden sind.

Ist z. B. $r = 2$, so werden die Möglichkeiten in Betracht zu ziehen sein, daß am Ende der m^{ten} Zeiteinheit beide Individuen der Gruppe (2) noch leben, oder daß beide gestorben sind, oder daß ein bestimmtes oder ein beliebiges von ihnen gestorben ist, während das andere noch lebt.

2. Sind alle Werte π und c auf einen einzigen Zeitpunkt bezogen und die c beliebig, so handelt es sich darum, ein solches System der π zu bestimmen, daß die nachher zu definierende Gleichheit der Leistungen des Versicherers und der versicherten Gruppe besteht.

Man hat Versicherung auf eine oder auf mehrere Personen, je nachdem $r = 1$ oder $r > 1$ ist.

Das Problem ist erst dann bestimmt, wenn man das Verhältnis zweier Summen angibt, die denselben Betrag haben, aber zu verschiedenen Zeiten fällig werden, und wenn man den Charakter der oben postulierten Ausscheideordnung näher definiert.

3. **Das Verzinsungsgesetz.** Es sei dC die Zunahme des Kapitals C, idt diejenige des Kapitals 1 in dem unendlich kleinen Zeitintervalle $(t, t + dt)$, und es seien i und C Funktionen der Zeit. Dann ist

$$C + dC = C(1 + idt),$$

woraus

$$\frac{dC}{C} = idt$$

$$C = C_0 e^{\int idt} \tag{1}$$

folgt. C_0 ist die durch das ursprüngliche Kapital definierte Integrationskonstante und e die Basis der natürlichen Logarithmen. Die Relation (1) wird, falls wir i konstant annehmen,

$$C = C_0 e^{it}, \tag{2}$$

oder, falls

$$\left.\begin{aligned} e^i - 1 &= i' \\ C &= C_0(1 + i')^t. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Gleichung (3) liefert den gesuchten Wert C unter den Annahmen, daß t ganzzahlig ist, daß $1 + i'$ den Vermehrungskoeffizienten der Einheitssumme in der Zeiteinheit darstellt, und daß die Verzinsung am Ende jeder Zeiteinheit geschieht.

Wir werden uns im folgenden auf (2) und (3) und auf die Gleichungen beschränken, die aus ihnen abgeleitet werden können. Wir bemerken hier nur, daß die Hypothese der Konstanz des Zinsfußes i im Laufe der Zeit, die ihnen zugrunde liegt, nicht ohne weiteres auf lange Zeitstrecken angewandt werden kann. In der Tat scheint aus wirtschaftlichen Untersuchungen hervorzugehen, daß innerhalb längerer Zeitstrecken der Zinsfuß eine Tendenz zur Verminderung aufweist.[1])

4. **Die Stabilität der Ausscheideordnung aus Γ.** Der Charakter der postulierten Ausscheideordnung möge nun dahin präzisiert werden, daß ihre Konstanz der einer Erscheinung gleichgesetzt wird, welche Ausdruck einer konstanten Wahrscheinlichkeit ist.[2])

Wir werden so dazu geführt, als Grundlage der daraus entstehenden Versicherungsmathematik Hypothesen zu formulieren, die eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich machen.

§ 2. 5. Angenommen, es entspreche jedem möglichen Zustande der Gruppe (r) aus Γ eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, ferner sei $p \cdot C$ der Wert einer Summe C, deren Zahlung von der Verwirklichung eines Tatbestandes abhängig ist, dem die Wahrscheinlichkeit p entspricht ($p \cdot C$ nennen wir den wahrscheinlichen Wert oder die mathematische Hoffnung von C), außerdem gelte die Gleichung (3), dann entspricht dem formulierten Probleme eine durchaus allgemeine Gleichung.

Es drücke $p_j(m)$ die Wahrscheinlichkeit der Leistung $c_j(m)$ aus, $\wp_j(m-1)$ diejenige der Leistung $\pi_j(m)$. Dann folgt aus dem Vorhergehenden, daß

$$\begin{aligned} &\sum_1^{(m)} \sum_1^{(j)} (1+i)^{k-m+1} \wp_j(m-1)\pi_j(m) - \\ &- \sum_1^{(m)} \sum_1^{(j)} (1+i)^{k-m+1} p_j(m) c_j(m) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

wo die Konstante k willkürlich ist. Die Gleichung (4) drückt die Bedingung dafür aus, daß die wahrscheinlichen Werte von Leistungen und Gegenleistungen, auf denselben Zeitpunkt bezogen, übereinstimmen. Ist dieser Zeitpunkt der Moment, in dem die Versicherung abgeschlossen wird, so ist $k = 0$.

1) In der Versicherungspraxis wird eine solche Tendenz dadurch berücksichtigt, daß man den Zinsfuß etwas kleiner wählt, als er zur Zeit des Abschlusses der Versicherung üblich ist. Ein solches Kriterium folgt aber auch aus anderen Betrachtungen, die im folgenden ohne weiteres klar erscheinen werden.

2) Wir werden Gelegenheit haben, eine solche völlig zu definieren.

Wir setzen

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{2}^{(m)}\sum_{1}^{(j)}(1+i)^{-m}p_j(m)c_j(m)-\\ -\sum_{2}^{(m)}\sum_{1}^{(j)}(1+i)^{-m+1}\wp_j(m-1)\pi_j(m)=R_1\cdot(1+i)^{-1}\\ \sum_{3}^{(m)}\sum_{1}^{(j)}(1+i)^{-m}p_j(m)c_j(m)-\\ -\sum_{3}^{(m)}\sum_{1}^{(j)}(1+i)^{-m+1}\wp_j(m-1)\pi_j(m)=R_2\cdot(1+i)^{-2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\quad(5)$$

und nennen $R_1, R_2 \ldots$ die Reserven der betrachteten Versicherung am Ende der ersten, bzw. der zweiten ... Zeiteinheit.

In allgemeinerer Weise können wir die eingeführten Summationen

$$\sum_{0}^{(m)}\sum_{1}^{(j)}(1+i)^{-m+1}\wp_j(m-1)\pi_j(m)=\sum\nolimits_1$$

$$\sum_{0}^{(m)}\sum_{1}^{(j)}(1+i)^{-m}p_j(m)c_j(m)=\sum\nolimits_{11}$$

in $\sum_1^1, \sum_1^2, \sum_{11}^1, \sum_{11}^2$ zerlegen, wo sich die Summen $\sum_1^1, \sum_{11}^1$ auf die ganzzahligen Werte von m im Intervalle $(0, r)$ erstrecken, während in $\sum_1^2, \sum_{11}^2$ die Variable m die Werte $r+1, r+2\ldots$ annimmt. Gleichung (4) kann dann geschrieben werden

$$\sum\nolimits_1^1+\sum\nolimits_1^2-\sum\nolimits_{11}^1-\sum\nolimits_{11}^2=0,$$

woraus man ableitet, falls man (5)

$$(1+i)^r\left(\sum\nolimits_{11}^2-\sum\nolimits_1^2\right)=R_r \qquad (6)$$

berücksichtigt,

$$(1+i)^r\left(\sum\nolimits_1^1-\sum\nolimits_{11}^1\right)=R_r. \qquad (7)$$

(6) und (7) definieren die *prospektive*, bzw. die *retrospektive* Methode der Bestimmung der Reserven.

Wir beziehen nämlich alle Leistungen des Versicherers und alle Gegenleistungen der versicherten Gruppe auf den Zeitpunkt, wo die Reserve berechnet wird, und nach (6) definieren wir die

Reserve als die Differenz zwischen den Leistungen und den Gegenleistungen, die nach diesem Zeitpunkte stattfinden werden, nach (7) als die Differenz zwischen den Gegenleistungen und den Leistungen, welche vor diesem Zeitpunkte stattgefunden haben.

Ist in (4) $\pi_j(0) \neq 0$, $\pi_j(1) = \pi_j(2) = \cdots = 0$ (identisch in j), so definiert man

$$\pi=\sum_{1}^{(m)}\sum_{1}^{(j)}(1+i)^{-m}p_j(m)\,c_j(m)$$

als die *einmalige Prämie* der betrachteten Versicherung. Sie stimmt mit der Reserve R_0 überein. Es ist klar, daß für $m = 0$ nur ein einziger Wert $\pi_j(m)$ in Betracht kommen kann: der Wert nämlich, welcher dem „bekannten" (d. h. die Wahrscheinlichkeit $p(0) = 1$ besitzenden) Zustande der Gruppe (r) entspricht.

6. Als Reserve einer Gruppe von Versicherungen bezeichnen wir die Summe der Reserven jeder einzelnen Versicherung der Gruppe. Sind $[R]$, $[\Sigma_1]$, $[\Sigma_{11}]$ die Summen der Reserven bzw. die Summen der zukünftigen Leistungen jeder versicherten Gruppe und des Versicherers jeder versicherten Gruppe gegenüber auf das Ende der r^{ten} Zeiteinheit bezogen, so liefert die Gleichung

$$[R]=[\Sigma_{11}]-[\Sigma_1]$$

die Höhe des Fonds $[R]$, welcher notwendig und hinreichend dafür ist, daß die dem Versicherer bezahlten und von ihm verzinsten Prämien den Verpflichtungen des Versicherers der versicherten Gruppe gegenüber gleichkommen. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß die Verzinsung der Kapitalien und das Ausscheiden aus den versicherten Gruppen, deren Zugehörigkeit zu Γ angenommen wird, genau nach den postulierten Gesetzen stattfindet.

7. Wir sehen hier von der Betrachtung des Verzinsungsgesetzes ab, das wir ohne weiteres als gültig annehmen.

Dagegen bemerken wir, daß aus der Annahme, die zugrunde gelegte Ausscheideordnung habe den Charakter einer Erscheinung, welcher eine bestimmte konstante Wahrscheinlichkeit entspricht, die Möglichkeit von Abweichungen zwischen der postulierten und der wirklich beobachteten Art des Ausscheidens folgt, welche Gewinne oder Verluste für den Versicherer hervorbringen werden, je nachdem sie ihm günstig oder ungünstig sind.

Die Gleichungen, welche wir aufstellen, entsprechen einer ersten Annäherung: sie entsprechen der Annahme, daß alle

Leistungen mit ihren wahrscheinlichen Werten (im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung) übereinstimmen. Tatsächlich können wir außer dieser Annahme eine ganze Reihe von ebenfalls möglichen Annahmen formulieren, welche zwischen den extremen Hypothesen enthalten sind, daß alle versicherten Individuen unmittelbar nach Abschluß der Versicherung sterben, und daß alle versicherten Individuen das Alter erreichen, von dem wir annehmen, es sei physisch unmöglich, dasselbe zu übertreffen.[1]) Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, daß jeder Hypothese eine Wahrscheinlichkeit entspricht, welche um so kleiner ist, je größer der Abstand zwischen ihr und der vorher betrachteten wahrscheinlichen Hypothese ist.

Als praktisch unmöglich (d. h. als die Wahrscheinlichkeit 0 besitzend) betrachtet man Abweichungen, denen eine sehr kleine und daher zu vernachlässigende Wahrscheinlichkeit entspricht.

8. Es kann angenommen werden,

a) daß die Versicherungsprämien der Gleichung (4) Genüge leisten;

b) daß sie größer sind als die Prämien, welche (4) genügen.

Der zweite Fall ist der wirklich eintretende. Um gegen die Wirkung zufälliger Abweichungen geschützt zu sein, setzt der Versicherer das Wirken konstanter Fehler voraus, die ihm ungünstig sind. So werden die Ausscheideordnung und die Verzinsung der Kapitalien, die er postuliert, ihm ungünstiger sein als diejenigen, die der Wirklichkeit am besten entsprechen würden; die Prämien werden also durch Zuschläge erhöht.

Im Falle a) ist die Bildung von besonderen Fonds (außer den Reserven $[R]$) unentbehrlich, welche dem Versicherer auch im Falle der Verwirklichung der ihm ungünstigen, aber praktisch möglichen Hypothesen gestatten, seine Verpflichtungen zu erfüllen. Mit der Frage der Bestimmung solcher Fonds beschäftigt sich die Theorie des Risikos, die sich eben die Aufgabe stellt, die Wirkung zufälliger Abweichungen in der Ausscheideordnung auf die finanzielle Lage der Versicherungsanstalt zu erforschen.

9. Hängen die Leistungen des Versicherers und diejenigen der versicherten Gruppen von anderen Umständen (oder „auch“

1) Es ist eine rein formale Beeinträchtigung der Allgemeinheit anzunehmen, daß das Absterben die einzige Form des Ausscheidens ist. (Vgl. 9.)

von anderen Umständen) ab als dem Überleben der versicherten Individuen zu verschiedenen Zeiten, so werden wir anstatt der Wahrscheinlichkeiten (oder „außer“ den Wahrscheinlichkeiten), die den verschiedenen Modi der Gruppe bezüglich der Sterblichkeit entsprechen, andere Wahrscheinlichkeiten in Betracht ziehen, die den Modi der Gruppe bezüglich der neuen Unterscheidungsmomente entsprechen. Wir werden demgemäß neben den eigentlichen Lebensversicherungen (auf welche wir uns im folgenden beschränken werden), andere Versicherungen (z. B. die Invaliditäts- und die Krankenversicherungen) haben, die mit den ersten die Kategorie der Personenversicherungen bilden (im Gegensatz zu der Sachenversicherung). Ihre Zurückführung auf ein einziges Schema, die sich rein formal ohne Schwierigkeiten ausführen läßt, ist bis jetzt nicht versucht worden und würde sich wahrscheinlich nicht als besonders nützlich erweisen.

Erster Abschnitt.

Die mathematischen und statistischen Grundlagen.

Kapitel I.

Die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Fehlertheorie.

§ 1. Die Grundbegriffe.

1. Es ist üblich, die *mathematische Wahrscheinlichkeit* oder *die Wahrscheinlichkeit a priori* (kurzweg: *die Wahrscheinlichkeit*) eines Ereignisses E als das Verhältnis zweier Zahlen zu definieren, welche bzw. die Anzahl der Elemente einer Menge[1]) dem Ereignis günstiger und die Anzahl der Elemente einer Menge gleichwertiger Fälle ausdrücken. Man läßt also den Ereignis- und mit ihm den Wahrscheinlichkeitsbegriff auf einer logischen Disjunktion beruhen. Ist A eine bestimmte wohldefinierte Eigenschaft (die wir z. B. durch das Prädikat „rot" oder „gerade" oder „gleich 6" ausdrücken) und M eine Menge von Elementen (z. B. die Kugeln einer Urne oder die ganzen Zahlen eines gegebenen Zahlenintervalls, oder die Zahlen 1 bis 6, die wir den Flächen eines Würfels eindeutig entsprechen lassen), und ist M_1 die Untermenge von M, die alle Elemente von M enthält, welchen die Eigenschaft A zukommt (z. B. die roten Kugeln unserer Urne, die geraden Zahlen unseres Zahlenintervalls, die mit der Zahl 6 versehene Fläche unseres Würfels), M_2 die Menge aller Elemente von M, denen die Eigenschaft A nicht zukommt (z. B. die Kugeln, die nicht rot

1) Es wird uns hier genügen, die Menge durch die Angabe einer Eigenschaft zu definieren, welche allen Elementen der Menge zukommt und nur diesen. Eine Menge bilden z. B. die Punkte einer Strecke oder die Birnen eines Korbes.

sind, u. dgl.), so ist für uns durch die Angabe der Mengenpaare

$$(M, M_1) \quad \text{bzw.} \quad (M, M_2)$$

ein Ereignis E und sein kontradiktorisches oder komplementäres Ereignis $\bar{E}$ gegeben, jedenfalls wenn wir die *„Gleichwertigkeit der Elemente von M betreffs der Eigenschaft A"* postulieren.

Was darunter zu verstehen ist, läßt sich mit scheinbarer Klarheit leicht angeben.

Man versteht darunter die Möglichkeit, ein beliebiges Element der Menge derart zu definieren (oder, wie man auch sagen kann: aus der Menge zu sondern oder herauszugreifen), daß die gegebene Definition darüber nichts aussagt, ob das betrachtete Element zur Menge M_1 gehört, oder nicht.

Ist z. B. die Menge M die Gesamtheit der Kugeln, die Menge M_1 die Gesamtheit der roten Kugeln einer Urne, so läuft die gestellte Forderung darauf hinaus, daß es möglich sein soll, eine Kugel aus der Urne derart „blindlings" herauszuziehen, daß eine rote und eine nicht-rote Kugel „ebensogut" herausgegriffen werden können, ohne daß die Farbe irgendeinen Einfluß auf die Möglichkeit des Gezogenwerdens ausübt. Wir sagen dann, es hänge nur vom „Zufall" ab, ob die herausgegriffene Kugel rot ist oder nicht.

Fragt man aber, wie diese Forderung empirisch zu fassen sei, und damit, auf welche Denkgebiete sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden läßt, so stößt man auf Schwierigkeiten, die keiner endgültigen Erledigung fähig zu sein scheinen.

Es ist z. B. klar, daß ein einfaches Nichtwissen (man habe keinen Grund, anzunehmen, daß die Gleichwertigkeit nicht vorhanden ist, *Prinzip des mangelnden Grundes)* nicht ausreicht, um die Behauptung der Gleichwertigkeit zu begründen; wie wird man aber entscheiden, ob die positive Kenntnis der Gleichwertigkeit *(Prinzip des zwingenden Grundes) in concreto* vorhanden ist?

Für uns wird die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die behandelten Gebiete die Folgerung eines besonderen Postulats sein, das nur insoweit zulässig ist, als die aus ihm abgeleiteten Resultate der Wirklichkeit nicht widersprechen, und das den Charakter einer einfachen Arbeitshypothese trägt.

2. Es seien

m die Anzahl der Elemente der Menge M

m_1 die Anzahl der Elemente der Menge M_1, die in M enthalten ist (symbolisch werden wir $M_1 < M$ schreiben).

$$p(E) = \frac{m_1}{m}$$

ist dann nach der gegebenen Definition die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$E = (M, M_1)$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein „blindlings" aus M herausgegriffenes Individuum M_1 angehört. Sind alle Elemente von M Elemente von M_1 $(M = M_1)$, so ist E „gewiß" und

$$m = m_1, \quad p(E) = \frac{m}{m} = 1.$$

Wir können also allgemein sagen:

„Ist ein Ereignis E gewiß, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich 1."

Enthält die Menge M_1 kein Element $(M_1 = 0)$, so ist E „unmöglich" und

$$m_1 = 0, \quad p(E) = \frac{0}{m} = 0,$$

also:

„Ist ein Ereignis E unmöglich, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich 0."

Es sei M_1' ebenfalls $< M$ und es bezeichne $\vartheta(M_1, M_1')$ die Menge, welche aus den gemeinsamen Elementen von M_1 und M_1' besteht (d. h. wie wir mit *R. Dedekind* sagen können: den „Schnitt" von M_1 und M_1').

Ist dann

$$\vartheta(M_1, M_1') = 0, \tag{1}$$

so werde unter

$$M_1 + M_1'$$

die Menge aller Elemente verstanden, die entweder zu M_1 oder zu M_1' gehören (d. h. *die Vereinigungsmenge* von M_1 und M_1').

Wir setzen

$$E_1 = (M, M_1), \quad E_1' = (M, M_1')$$

und nehmen an, daß M_1' m_1' Elemente enthält.

Aus der Annahme (1) folgt, daß unmöglich E_1 und E_1' gleichzeitig eintreten können, d. h. daß sich E_1 und E_1' gegenseitig ausschließen. Es folgt aber auch aus der Wahrscheinlichkeitsdefinition, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$E = (M, M_1 + M_1'),$$

das wir auch mit

$$E = E_1 + E_1'$$

bezeichnen können, gleich

$$\frac{m_1 + m_1'}{m} = \frac{m_1}{m} + \frac{m_1'}{m},$$

d. h. gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten von E_1 und E_1' ist. Nun tritt E allemal ein, wenn entweder E_1 oder E_1' eintritt. Wir können allgemein sagen, indem wir von zwei auf n Ereignisse übergehen:

„Es seien

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

Ereignisse, die sich gegenseitig ausschließen, und

$$p_1 \quad p_2 \qquad p_n$$

die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Dann ist

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E_1 oder E_2 oder $\ldots E_n$ eintritt. Dies ist der Satz von der *totalen* oder *vollständigen Wahrscheinlichkeit.*

Ist insbesondere

$$M_1 + M_2 = M, \quad E_1 = (M, M_1), \quad E_2 = (M, M_2),$$

so folgt aus ihm:

„Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis nicht eintritt, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, ist

$$q = 1 - p."$$

Enthält z. B. eine Urne a weiße, b schwarze, c rote Kugeln, so sind

$$\frac{a}{a+b+c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{a+b}{a+b+c}, \quad \frac{b+c}{a+b+c}$$

die Wahrscheinlichkeiten, daß die herausgegriffene Kugel weiß, bzw. schwarz, bzw. weiß oder schwarz, bzw. nicht weiß ist.

3. Es sei N eine Menge, wie M, und

$$\vartheta(M, N) = 0, \quad M_1 < M, \quad N_1 < N.$$

Mit $M \cdot N$ bezeichnen wir die *Verbindungsmenge* der Mengen M und N, d. h. die Menge, deren Elemente durch alle möglichen

Kombinationen jedes Elements von M mit jedem Element von N gebildet werden.

Ist m die Anzahl der Elemente von M, n die Anzahl der Elemente von N, so ist offenbar $m \cdot n$ die Anzahl der Elemente von $M \cdot N$.

Ist nun

$$E_1 = (M, M_1) \quad \text{und} \quad p(E_1) = \frac{m_1}{m},$$

$$E_1' = (N, N_1) \quad \text{und} \quad p(E_1') = \frac{n_1}{n},$$

$$E = (M \cdot N, M_1 \cdot N_1) = E_1 \cdot E_1',$$

so ist auch

$$p(E) = \frac{m_1 n_1}{m \cdot n} = p(E_1) \cdot p(E_1'). \tag{2}$$

Das Ereignis E tritt dann und nur dann ein, falls sowohl E_1 als E_1' eingetreten ist; dabei kann es vorkommen, daß das Eintreten von E_1' nicht unabhängig von dem Eintreten von E ist.

Als Beispiel einer zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit wollen wir das folgende angeben. Es ist nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß, wenn dreimal nacheinander eine Kugel aus einer Urne gezogen wird, welche 90 mit den Zahlen 1 bis 90 versehene Kugeln enthält, die gezogenen Zahlen ungerade sind.

Wir nehmen zuerst an, daß nach jedem Versuch die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wird.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist offenbar

$$\left(\frac{45}{90}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Wir können aber auch annehmen, daß die Kugeln gleichzeitig herausgezogen werden, oder (was auf dasselbe hinauskommt) daß nach jedem der zwei ersten Versuche die gezogene Kugel nicht in die Urne zurückgelegt wird.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Zahl ungerade ausfällt, ist, wie vorher, $\frac{45}{90}$. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß, nachdem die erste Zahl ungerade gewesen ist, auch die zweite es ist, $\frac{44}{89}$. Endlich ist $\frac{43}{88}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die dritte Zahl ungerade ist, wenn es die zwei ersten gewesen sind.

$$\frac{45}{90} \cdot \frac{44}{89} \cdot \frac{43}{88} = \frac{43}{356}$$

ist daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Gleichung (2) läßt sich unmittelbar auf beliebig viele Ereignisse ausdehnen. Ist insbesondere

$$E_1 = E_1' = \cdots = E_1^{(n)}$$

$$p_1 = p_1 = \cdots p_1^{(n)} = p,$$

so folgt aus ihr

$$p(E_1 \cdot E_1' \cdots E_1^{(n)}) = p^n.$$

„Die Wahrscheinlichkeit der n-maligen Wiederholung eines und desselben Ereignisses ist gleich der n^{ten} Potenz seiner Wahrscheinlichkeit."

4. Man nennt den durch Gleichung (2) formulierten Satz den *„Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit"* und spricht ihn in der Form aus:

„Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist gleich dem Produkte ihrer Wahrscheinlichkeiten, die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen unter der Voraussetzung berechnet, daß die ihm in der Sukzession vorangehenden eingetretenen sind."

Daneben ist ein anderer Modus des Zusammentreffens zu berücksichtigen, den man nicht immer scharf genug vom ersten trennt.[1])

Eine Urne enthalte a weiße und b rote Kugeln, deren jede mit einer der Zahlen 1 bis $a + b$, $(a + b = 2n)$, versehen ist, die sie eindeutig definiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(E_1)$ dafür, daß ich eine weiße Kugel herausgreife? welche diejenige $p(E_1')$, daß die Kugel eine gerade Zahl trage? und endlich: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(E) = p(E_1$ und $E_1')$, daß ich eine weiße Kugel herausgreife, die mit einer geraden Zahl versehen ist? Bezeichnet M die Menge der Kugeln, M_1 die Menge der weißen Kugeln der Urne, M_1' die Menge der Kugeln, die eine gerade Zahl tragen, so ist $\vartheta(M_1, M_1')$ die Menge der weißen, durch eine gerade Zahl ausgezeichneten Kugeln, und es ist

$$E = (E_1 \text{ und } E_1') = (M, \vartheta(M_1, M_1')).$$

Wird man hier

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E_1') \tag{2'}$$

1) Die Verwechslung geht z. B. durch die ganze Behandlung von *G. Boole* (*An investigation into the laws of thougt,* 1854) hindurch.

setzen können? Im allgemeinen offenbar nicht: sind es 5 weiße Kugeln und tragen sie bzw. die Zahlen 1 bis 5, ferner 3 rote Kugeln, so ist

$$p(E_1) = \frac{5}{8}, \quad p(E_1') = \frac{1}{2}, \quad p(E_1) \cdot p(E_1') = \frac{5}{16} \neq p(E) = \frac{1}{4}.$$

Bezeichnet der Kürze halber $p(1, 1)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von E_1 *und* E_1', $p(1, 0)$, $p(0, 1)$, $p(0, 0)$ bzw. die Wahrscheinlichkeiten, daß E_1 und Nicht-E_1', daß Nicht-E_1 und E_1', daß weder E_1 noch E_1' eintreten, und ist

$$p(E_1) = p_1, \quad p(E_1') = p_2,$$

so hat man den Satz:

„Ist die Bedingung

$$p(1, 1) \cdot p(0, 0) = p(0, 1) \cdot p(1, 0) \qquad (2'')$$

(die sogenannte ‚*Unabhängigkeitsbedingung*') erfüllt, so gilt auch die Gleichung (2')

$$p(1, 1) = p_1 \cdot p_2."$$

Um dies einzusehen, bemerken wir, daß die Menge M_1 der weißen Kugeln gleich der Summe der Mengen der weißen, mit einer geraden Zahl versehenen und der weißen mit einer ungeraden Zahl versehenen Kugeln ist, so daß offenbar

$$p_1 = p(1, 0) + p(1, 1)$$

ist. Aus dieser und aus der analogen Beziehung

$$p_2 = p(0, 1) + p(1, 1),$$

sowie aus

$$p_1 + p_2 = 2p(1, 1) + p(1, 0) + p(0, 1)$$
$$p(0, 0) + p(1, 1) + p(0, 1) + p(1, 0) = 1$$

und aus (2'') folgert man:

$$\begin{aligned} p(1, 1) \cdot p(0, 0) &= (p_2 - p(1, 1))\,(p_1 - p(1, 1)) \\ &= p_1 \cdot p_2 - p(1, 1)\,\{p_1 + p_2 - p(1, 1)\} \\ &= p_1 \cdot p_2 - p(1, 1)\,\{p(1, 1) + p(0, 1) + p(1, 0)\} \\ &= p_1 p_2 - p(1, 1)\,\{1 - p(0, 0)\}, \end{aligned}$$

also auch

$$p_1 p_2 - p(1, 1) = 0$$

und damit die Gleichung (2')

$$p_1 \cdot p_2 = p(1, 1)$$

w. z. b. w.

5. Dieselbe Form der Ableitung gilt für die besondere Zusammensetzung von Ereignissen, die wir in der Nr. 3 behandelt haben: in jenem Falle (und das ist das Wesentliche an der ganzen Theorie) ist aber die Unabhängigkeitsbedingung identisch erfüllt.

Es sei

$$M = M_1 + M_2, \quad N = N_1 + N_2.$$

Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} (M, M_1) &= (M \cdot N, M_1 \cdot N) = (M \cdot N, M_1(N_1 + N_2)) \\ &= (M \cdot N, M_1 \cdot N_1) + (M.N, M_1 \cdot N_2) \\ (N, N_1) &= (M \cdot N, M_1 N_1) + (MN, N_1 \cdot M_2) \end{aligned}$$

und, falls wir die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p(1, 1), \ldots, p(0, 0)$ entsprechend definieren,

$$p_1 = p(1, 1) + p(1, 0)$$
$$p_2 = p(1, 1) + p(0, 1).$$

Hieraus lassen sich die übrigen Beziehungen ableiten.

Es ist ebenfalls leicht zu sehen, daß die Bedingung (2'') identisch befriedigt ist.

Es ist

$m \cdot n$ die Anzahl der Elemente der Verbindungsmenge $M \cdot N$
$m_1 n_1$ „ „ „ „ „ „ $M_1 \cdot N_1$
$m_1(n - n_1)$ „ „ „ „ „ „ $M_1 \cdot N_2$
$(m - m_1)(n - n_1)$ die Anzahl der Elemente der Verbindungsmenge $M_2 \cdot N_2$,

also auch

$$p(0, 0) = p\{(M_1.N, M_2 \cdot N_2)\} = \frac{(m - m_1)(n - n_1)}{mn}$$
$$p(0, 1) = p\{(M_1.N, M_2 \cdot N_1)\} = \frac{(m - m_1)n_1}{mn}$$
$$p(1, 0) = p\{(M \cdot N, M_1 \cdot N_2)\} = \frac{m(n - n_1)}{mn}$$
$$p(1, 1) = p\{(M \cdot N, M_1 N_1)\} = \frac{m_1 \cdot n_1}{mn}$$

$$\begin{aligned} p(0, 0) \cdot p(1, 1) &= \frac{(m - m_1)(n - n_1)}{mn} \cdot \frac{m_1 n_1}{mn} \\ &= \frac{m_1(n - n_1)}{mn} \cdot \frac{(m - m_1)n_1}{mn} = p(1, 0) \cdot p(0, 1) \end{aligned}$$

w. z. b. w.

6. Außer den Problemen, die sich auf endliche Mengen beziehen, hat man mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch Probleme behandelt, bei welchen stetige Mannigfaltigkeiten in Betracht kommen, und hat sich dadurch zu einer besonderen Formulierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes veranlaßt gesehen, den man „geometrische Wahrscheinlichkeit" nennt.

Wir werden später sehen, in welchem Sinne die vorher gegebene und die hier benutzte Definition als Modalitäten eines und desselben Begriffes anzusehen sind, und wollen hier zunächst die Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten als eine für sich stehende behandeln.

Eine horizontale Ebene ist mit einem Gitter äquidistanter Parallelen vom Abstande a bedeckt; auf dieses Gitter wird eine Nadel geworfen, deren Länge $c < a$ ist: gesucht wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine der Geraden trifft.

Das Problem, das von *L. Buffon* aufgeworfen und unter dem Namen „Nadelproblem" bekannt wurde, bestimmt man dadurch, daß man alle Richtungen der Nadel und alle Abstände γ des Nadelmittelpunktes C von der am nächsten liegenden Parallele des Systems, $\left(0 < \gamma < \frac{a}{2}\right)$, als „gleichwertig" betrachtet.

Jeder Richtung entspricht eineindeutig ein Winkel θ der positiven Richtung der Nadel und der durch C hindurchgehenden Senkrechten zu den Parallelen des Systems.

Da γ alle Werte des Intervalls 0 bis $\frac{a}{2}$, θ alle Werte zwischen 0 und π annehmen kann, so wird die Gesamtheit der überhaupt möglichen Fälle durch

$$\frac{a\pi}{2}$$

gemessen. Hat aber γ einen Wert des Intervalls $(\gamma, \gamma + d\gamma)$, so ist

$$2 \arccos \frac{2\gamma}{c}$$

das Maß der Gesamtheit der günstigen Fälle; lassen wir die Variable γ die Werte des Intervalls $\left(0, \frac{c}{2}\right)$ durchlaufen, so wird dieses Maß zu

$$2\int_0^{\frac{c}{2}} \arccos \frac{2\gamma}{c}\, d\gamma = c\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\frac{c}{\pi \frac{a}{2}} = \frac{2c}{a\pi}.$$

Diese Behandlung der gestellten Aufgabe läßt den Grundgedanken der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten leicht erkennen, nach welchem die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein „blindlings" aus einer wohldefinierten stetigen Mannigfaltigkeit geometrischer Gebilde herausgegriffenes Individuum gewisse Bedingungen erfülle, mit dem Verhältnis zweier (einfacher oder mehrfacher) Integrale identifiziert wird, von denen das erste über solche Werte der Variablen x, bzw. über solche Wertverbindungen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (die Koordinaten eines Punktes im entsprechenden n-dimensionalen Raume R_n) ausgedehnt wird, die den auferlegten Bedingungen genügen, das zweite über alle Werte bzw. über alle Wertverbindungen, welche die in Betracht kommende, stetige Mannigfaltigkeit analytisch definieren.[1])

Es wird dabei angenommen, daß gleiche Ausdehnungen (Längen, Flächen, Volumina ...) gleichwahrscheinlich sind, d. h. daß die Verteilung der Punkte auf die betrachteten geometrischen Gebilde überall die gleiche Dichtigkeit besitzt. Läßt man diese

1) Oder auch: bezeichnet $\varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit, daß der blindlings aus der Strecke (0, 1) herausgegriffene Punkt x in das Intervall $(x, x + dx)$ fällt, (wobei $0 \leqq x \leqq 1$), so ist auch

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $x_0 \leqq x \leqq x_1$, und es ist

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = 1,$$

da es „gewiß" ist, daß $0 \leqq x \leqq 1$.

Im Falle von n Variablen wird das n-fache Integral

$$\int\int \ldots \int \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,,$$

erstreckt auf das Gebiet, in welches das ausgewählte Gebilde fallen soll, die gesuchte Wahrscheinlichkeit messen.

Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, daß die hier und die im Texte gegebene Definition wesentlich identisch sind.

Annahme fallen, ohne sie durch eine äquivalente zu ersetzen, so verliert der Wahrscheinlichkeitsansatz überhaupt jeden Sinn.

7. Wir können aber die Frage der Definition geometrischer Wahrscheinlichkeiten von einem anderen Gesichtspunkte aus behandeln. Ist die geometrische Wahrscheinlichkeit überhaupt eine Wahrscheinlichkeit, so sollten auch für sie die Sätze gelten, die wir aus der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition abgeleitet haben. Diese Sätze bilden ein System von Eigenschaften, das dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zukommt und zur Definition desselben benutzt werden kann.

Wir können also entweder eine Wahrscheinlichkeitsgröße willkürlich präzisieren und dann aus ihrer Definition die Eigenschaften ableiten, die ihr zukommen, oder umgekehrt vom postulierten System von Eigenschaften ausgehen und nach der Klasse von Größen fragen, die durch diese Eigenschaften ausgezeichnet sind. Damit gelangt man zu einer Wahrscheinlichkeitsdefinition, der gegenüber die vorher besprochenen, auf den Fall diskreter bzw. kontinuierlicher Mengen sich beziehenden Definitionen als besondere Fälle erscheinen.

Fragen wir z. B. nach der Klasse W von Größen, die im Falle linearer kontinuierlicher Mengen[1]) dem in der Form

„Es seien
$$E_1, E_2, \dots$$
Ereignisse, die sich gegenseitig ausschließen,
$$p_1, p_2, \dots$$
die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Dann ist
$$p_1 + p_2 + \cdots$$
die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E_1 oder E_2 oder eins der übrigen Ereignisse eintritt."

ausgesprochenen und als Postulat gewählten Satze von der totalen Wahrscheinlichkeit, und dem Satze

„Ist E gewiß, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich 1"

genügen, so gelangen wir wieder zu den „geometrischen Wahrscheinlichkeiten".

1) Der Fall, wo die Mengen weder linear noch kontinuierlich sind, bietet wesentlich neue Schwierigkeiten.

Es sei $W = \varphi(u, v)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Punkt x, der dem Intervall $(0, 1)$ gehört, in das Intervall (u, v) $(0 \leqq u \leqq x \leqq v \leqq 1)$ falle.

Wir haben zunächst
$$\varphi(0, 1) = 1$$
$$\varphi(0, u) + \varphi(u, v) = \varphi(0, v).$$
Also auch, falls wir $\varphi(0, x) = \psi(x)$ schreiben,
$$\varphi(u, v) = \psi(v) - \psi(u). \qquad (3)$$
Die Funktionalgleichung (3) hat bekanntlich die Lösung
$$W = \varphi(u, v) = \int_u^v \psi(x)\, dx.$$
Damit werden wir aber dazu geführt, $\psi(x)\,dx$ als Maß der Wahrscheinlichkeit zu betrachten, daß x dem Intervall $(x, x + dx)$ gehört: dies ist aber die Annahme, die der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten zugrunde liegt.

Es folgt daraus noch nicht, daß die W-Größen (d. h. die geometrischen Wahrscheinlichkeiten) alle die Eigenschaften besitzen, die zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nötig sind, z. B. daß sie auch den Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit erfüllen. Erst nachdem ein solcher Beweis (der wirklich ausführbar ist)[1]) gegeben ist, wird man sie als „Wahrscheinlichkeiten", d. h. als Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung, betrachten dürfen.[2])

1) Vgl. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Bd. XXVIII: *La definizione descrittiva di probabilità ed il teorema della probabilità composta.*

2) Eine noch größere Allgemeinheit erreicht man dadurch, daß man den hier benutzten Ereignisbegriff fallen läßt und man als Ereignis alles das auffaßt, was entweder geschehen oder ausbleiben kann. Einen solchen Weg haben *G. Bohlmann* (Die Grundbegriffe der *Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung Atti del 4° Congresso internazionale di Matematica,* Roma 1908) und zu anderen Zwecken *P. Medolaghi (La logica matematica ed il calcolo delle Probabilità,* Milano 1907) eingeschlagen. Es entstehen dann aber wesentlich neue Schwierigkeiten, besonders betreffs der Möglichkeit des Beweises, daß es wirklich Größen gibt (die Wahrscheinlichkeiten eines in diesem Sinne definierten Ereignisses), die dem Eigenschaften- oder Postulatensystem genügen. Nach *G. Bohlmann* versagt die Reduktion der

§ 2. Der wahrscheinlichste Wert und der wahrscheinliche Wert. Der mittlere Fehler.

8. Es sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis E eintritt und q die Wahrscheinlichkeit des zu E komplementären Ereignisses $\bar{E}$. Dann ist $E + \bar{E}$ gewiß, also auch

$$p + q = 1.$$

Werden s Versuche gemacht, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß E α-mal eintritt und $s-\alpha$-mal ausbleibt, nach dem Vorhergehenden gleich $p^\alpha q^{s-\alpha}$ zu setzen, falls die Reihenfolge des Eintretens und des Nichteintretens von E vorgeschrieben ist.

So können wir z. B. $s = 6$ annehmen und nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß E beim dritten und sechsten Versuche ausbleibt, bei allen übrigen Versuchen eintritt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$ppqppq = p^4 q^2.$$

Wir können aber auch einfach nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß E viermal eintritt und zweimal ausbleibt. Diese ist offenbar gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, welche allen möglichen Reihenfolgen entsprechen, die mit dem viermaligen Vorkommen und zweimaligen Ausbleiben von E verbunden sind.

Solche Reihenfolgen gibt es nun, wie eine sehr leichte Überlegung zeigt, ebenso viele als Permutationen von sechs Elementen, von denen je vier und zwei einander gleich sind.

Es ist daher, da diese Zahl durch $\frac{6!}{4!\,2!}$ ausgedrückt wird,

$$\frac{6!}{4!\,2!} p^4 q^2$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Sind s und α positive ganze Zahlen, und ist $s > \alpha$, so ist ganz allgemein

$$\frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!} p^\alpha q^{s-\alpha} = \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} \tag{4}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß, falls s Versuche gemacht werden,

statistischen Ereignisse auf das Schema günstiger und ungünstiger Fälle ganz.

E α mal eintritt. Bekanntlich bezeichnet

$$\binom{s}{\alpha} = \binom{s}{n-\alpha} = \frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}$$

die Anzahl der Kombinationen α^{ter} bzw. $(s-\alpha)^{\text{ter}}$ Klasse, die aus s Elementen gebildet werden können.

Den Werten $\alpha = s, s-1, \ldots, 2, 1, 0$ entsprechen der Reihe nach die einzelnen Glieder folgender Entwicklung

$$(p+q)^s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=s} \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = 1.$$[1]

α wird in der Tat einen und nur einen von den ganzzahligen Werten des Intervalles $(0, s)$ mit Einschluß der Grenzen annehmen.

9. Es sei

$$u_\alpha = \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha}.$$

Dann ist

$$\frac{u_{\alpha+1}}{u_\alpha} = \frac{s!}{(\alpha+1)!\,(s-\alpha-1)!} p^{\alpha+1} q^{s-\alpha-1} \frac{\alpha!\,(s-\alpha)!}{s!} p^{-\alpha} q^{-s+\alpha}$$

$$= \frac{s-\alpha}{\alpha+1} \frac{p}{q}; \quad \frac{u_\alpha}{u_{\alpha-1}} = \frac{s-\alpha+1}{\alpha} \frac{p}{q}.$$

Die Werte u_α sind in endlicher Anzahl vorhanden; es hat also einen Sinn, nach dem Werte α' von α zu fragen, der den Ungleichungen genügt:

$$u_{\alpha'-1} < u_{\alpha'} > u_{\alpha'+1}.$$

1) Wir können allgemeiner annehmen, daß $p_1 p_2 \ldots p_s$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $E_1 E_2 \ldots E_s$ sind, $q_1 q_2 \ldots q_s$ die Wahrscheinlichkeiten der zu E_1 bzw. zu $E_2 \ldots, E_s$ komplementären Ereignisse $\bar{E}_1, \bar{E}_2 \ldots, \bar{E}_s$. Die einzelnen Glieder der Entwicklung

$$(p_1 + q_1)(p_2 + p_2) \cdots (p_s + q_s) = 1$$

liefern dann die Wahrscheinlichkeiten, welche den möglichen Gruppierungen der E und $\bar{E}$ entsprechen, falls s Versuche gemacht werden, und sich auf kein Ereignis mehr wie ein Versuch bezieht. Die Glieder der Entwicklung

$$(p_1 + q_1)^{\alpha_1} (p_2 + q_2)^{\alpha_2} \cdots (p_s + q_s)^{\alpha_s}$$

liefern die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Gruppierungen der E und der $\bar{E}$, falls $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_s$ Versuche gemacht werden, von denen sich α_1 auf E_1, α_2 auf $E_2, \ldots, \alpha_s$ auf E_s beziehen.

Aus

$$\frac{u_{\alpha'+1}}{u_{\alpha'}} = \frac{s-\alpha'}{\alpha'+1}\,\frac{p}{q} < 1\,,$$

und

$$\frac{u_{\alpha'}}{u_{\alpha'-1}} = \frac{s-\alpha'+1}{\alpha'}\,\frac{p}{q} > 1$$

folgt, daß

$$p(s-\alpha') < q(\alpha'+1)$$

$$p(s-\alpha'+1) > q\alpha'$$

und

$$ps - q < \alpha' < ps + p \qquad (5)$$

ist. Es ist $p + q = 1$. Ist daher $ps - q$ keine ganze Zahl, so ist es $ps + p$ auch nicht, und es gibt einen einzigen ganzzahligen Wert von α, der zwischen den beiden enthalten ist. Ist dagegen $ps - q$ ganzzahlig, so wird es auch $ps + p$ sein: zwei aufeinander folgenden Gliedern der Binomialentwicklung entsprechen gleiche Wahrscheinlichkeiten.

Ist die durch die Ungleichungen (5) definierte Zahl $\alpha' = ps$ ganzzahlig, so ist sie das gesuchte wahrscheinlichste Ergebnis der Versuchsreihe s, d. h. es ist

$$\binom{s}{sp} p^{sp} q^{sq}$$

das größte unter allen Gliedern der Entwicklung $(p+q)^s$. Man bezeichnet sie als den *wahrscheinlichsten Wert von α.*

Ist dagegen ps keine ganze Zahl, und ist $[ps]$ die größte in ps enthaltene ganze Zahl, so ist auch

$$u_{[ps]} \gtrless u_{[ps]+1} \text{ je nachdem } q \gtrless ps - [ps].$$

Nimmt man $\alpha' = ps$ an, so folgt aus

$$s - \alpha' = s - ps = sq$$

und aus

$$ps - q < \alpha' < ps + p$$

$$\mp \frac{q}{s} < \alpha' - ps < \pm \frac{p}{s}\,.$$

Die Differenz $\alpha' - ps$ ist also zwischen den Grenzen $\pm \frac{1}{s}(p+q) = \pm \frac{1}{s}$ enthalten; sie kann daher durch Vergrößerung

von s beliebig klein gemacht werden. Das Verhältnis $\frac{\alpha'}{s-\alpha'}$ weicht als destoweniger von $\frac{p}{q}$ ab, je größer s ist.

10. Von anderer Art ist der Begriff des *wahrscheinlichen Wertes.* Eine Variable α möge der Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ fähig sein, und es entspreche dem Werte α_i die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\alpha_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Sind die Annahmen ausgeschlossen, daß α mehr wie einen oder keinen von den Werten α_i annimmt, so ist

$$\sum_{i=1}^{i=n}{}^{(i)} \varphi(\alpha_i) = 1\,,$$

und wir definieren

$$\sum_{i=1}^{i=n}{}^{(i)} \alpha_i \varphi(\alpha_i) = \alpha^0$$

als den *wahrscheinlichen Wert von α.*

Man kann α^0 auch als die *mathematische Hoffnung* (oder die *mathematische Erwartung*) einer bestimmten Person auffassen.

Die betrachtete Person sei an der Reihe $E_1 E_2 \ldots E_n$ einander ausschließender Ereignisse, denen der Reihe nach die Wahrscheinlichkeiten $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ entsprechen, in der Weise interessiert, daß das Eintreten von E_i für sie eine Einnahme (oder Ausgabe) α_i zur Folge hat; im Falle der Einnahme soll α_i positiv, im anderen Falle negativ sein. Dann hat die Person eine gewisse Summe zu gewärtigen, welche verschiedener Werte fähig ist. Ihr Mittelwert, den wir die mathematische Hoffnung der betrachteten Person nennen, ist die Summe der Produkte ihrer möglichen Werte mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, d. h. α^0.

Ein Spiel heißt *gerecht,* falls die mathematischen Hoffnungen aller daran interessierten Spieler gleich Null sind.

11. Peter wirft eine Münze. Zeigt sie Wappen beim ersten Wurfe, so hat er Paul einen Dukaten zu geben; zeigt sie Wappen erst beim zweiten Wurfe, zwei Dukaten, erst beim dritten, vier Dukaten, ... erst beim n^{ten} Wurfe, 2^{n-1} Dukaten.

Wie groß ist die mathematische Hoffnung Pauls, oder mit anderen Worten, wieviel hat er am Anfang des Spieles Peter zu zahlen, damit das Spiel gerecht sei?

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Münze erst beim $n+1^{\text{ten}}$ Wurfe Wappen zeigt, ist $\frac{1}{2^{n+1}}$; ihr Produkt mit der entsprechenden Einnahme Pauls, $\frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n = \frac{1}{2}$. Die gesuchte Größe ist

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + ad \text{ inf.},$$

also unendlich groß.

Dieses merkwürdige Resultat hat das Problem, das man gewöhnlich „Petersburger Problem“ nennt, in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung berühmt gemacht und Anlaß zu einer Theorie gegeben, welche in der Entwicklung der reinen Wirtschaftslehre eine grundlegende Rolle spielt. Es ist dies die *Bernoulli*sche Theorie des moralischen Wertes.

Ist x das Vermögen einer Person und k eine positive Konstante, so ist nach *Bernoulli*

$$dy = k\frac{dx}{x}$$

der moralische Wert einer Vergrößerung dx von x. Es ist also

$$k(\log b - \log a) = k \log \frac{b}{a}$$

der moralische Wert einer endlichen Änderung $\overline{b-a}$ des Vermögens, das wir gleich a voraussetzen.[1])

Es sei x das Vermögen Pauls. Wir ersetzen in der Bildung von $\sum \alpha_i \varphi(\alpha_i)$ α_i durch seinen moralischen Wert $k \log \frac{x+\alpha_i}{x}$. Der Mittelwert

$$k\left\{\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x} + \frac{1}{4}\log\frac{x+2}{x} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{x+2^n}{x}\right\}$$

ist eine endliche Größe.

12. Wir fragen nach dem wahrscheinlichen Werte von α, von α^2, von $\alpha - \alpha^0$, von $(\alpha-\alpha^0)^2$ unter der Voraussetzung, daß

$$\varphi(\alpha) = \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha},$$

1) $b = a,\ b = a^2, \ldots b = a^n$ entsprechen bzw. die moralischen Werte $0, k\log a, 2k\log a \ldots$, d. h. ändert sich das Vermögen nach einer geometrischen Progression, so ändert sich der moralische Wert nach einer arithmetischen. Dem Leser wird die Beziehung nicht entgehen, welche zwischen dieser Hypothese und dem psychophysischen Prinzip von *Weber-Fechner* besteht.

d. h., daß $\varphi(\alpha)$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, mit welcher in einer Reihe von s Versuchen das Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, α-mal eintritt.

Wir erhalten aus

$$\sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} \binom{s}{\alpha} (tp)^\alpha q^{s-\alpha} = (tp+q)^s,$$

indem wir nach dem Hilfsparameter t differentiieren,

$$\sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} p\alpha \binom{s}{\alpha} (tp)^{\alpha-1} q^{s-\alpha} = sp(tp+q)^{s-1} \tag{6}$$

und

$$\alpha^0 = \sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} \alpha \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = sp \tag{7}$$

für $t = 1$. Die Gleichung (6) liefert, falls wir mit tp multiplizieren, und nochmals nach t differentiieren

$$\sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} p^2\alpha^2 \binom{s}{\alpha} (tp)^{\alpha-1} q^{s-\alpha} = sp^2(tp+q)^{s-1} + s(s-1)p^3 t(tp+q)^{s-2}$$

und

$$(\alpha^2)^0 = \sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} \alpha^2 \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = s^2p^2 + spq$$

für $t = 1$.

Es ist ferner

$$(\alpha-\alpha^0)^0 = \sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} (\alpha-\alpha^0)\varphi(\alpha) = \sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} \alpha\varphi(\alpha) - \alpha^0 \sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} \varphi(\alpha) = 0, \tag{8}$$

und aus

$$(\alpha-\alpha^0)^2 = \alpha^2 + (\alpha^0)^2 - 2\alpha\alpha^0$$

folgt, daß

$$\{(\alpha-\alpha^0)^2\}^0 = \sum_{0}^{s}{}_{(\alpha)} (\alpha-\alpha^0)^2 \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} = (\alpha^2)^0 + (\alpha^0)^2 - 2(\alpha^0)^2 = sp(1-p) = spq. \tag{9}$$

Man nennt allgemein

$$m^2 = \{(\alpha - \alpha^0)^2\}^0 = \sum_0^s{}^{(\alpha)} \varphi(\alpha)(\alpha - \alpha^0)^2 \qquad (10)$$

das Quadrat der *mittleren Abweichung* oder des *mittleren Fehlers* m von α.

Wie (5) und (7) lehren, sind im Falle der beiden Relationen zugrunde liegenden Form von $\varphi(\alpha)$ der wahrscheinlichste und der wahrscheinliche Wert entweder übereinstimmende Größen oder Größen, deren Differenz von der Ordnung $\frac{1}{s}$ ist.

Auf den wichtigen Ausdruck der mittleren Abweichung, welche (10) liefert, werden wir noch zurückkommen.

§ 3. Die Sätze von Tchebychef.

13. Es sei $a > m$. Aus

$$m^2 = \sum(\alpha - \alpha^0)^2 \varphi(\alpha)$$

folgt, wenn wir

$$\alpha_i - \alpha^0 = h_i$$

setzen und durch a^2 dividieren,

$$\varphi(\alpha_1)\frac{h_1^2}{a^2} + \varphi(\alpha_2)\frac{h_2^2}{a^2} + \cdots + \varphi(\alpha_s)\frac{h_s^2}{a^2} = \frac{m^2}{a^2}$$

oder, wenn wir mit $h', h'', h''' \ldots$ diejenigen Abweichungen vom wahrscheinlichen Werte bezeichnen, die größer sind als a, mit $\varphi(\alpha)', \varphi(\alpha)'', \ldots$ die ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, und alle Abweichungen vernachlässigen, die kleiner sind als a,

$$\varphi(\alpha)'\frac{h'^2}{a^2} + \varphi(\alpha)''\frac{h''^2}{a^2} + \cdots < \frac{m^2}{a^2},$$

woraus *a fortiori* folgt, da $h'^2, h''^2, \ldots > a^2$ sind:

$$\varphi(\alpha)' + \varphi(\alpha)'' + \cdots < \frac{m^2}{a^2}. \qquad (11)$$

Es sei W die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der numerische Wert der mittleren Abweichung nicht größer ist als a: die Gleichung (11) liefert dann

$$1 - W < \frac{m^2}{a^2}$$

$$W > 1 - \frac{m^2}{a^2}$$

oder auch

$$W > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

falls wir $a = \lambda m$, $(\lambda > 1)$, postulieren.

Damit ist der Satz bewiesen:

Die Wahrscheinlichkeit W dafür, daß die Differenz $|\alpha - \alpha^0|$ das λ-fache der mittleren Abweichung nicht überschreitet, ist größer als $1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

14. Es seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ irgendwelche Variablen, deren jede mehrere verschiedene Werte, jeden mit bestimmter Wahrscheinlichkeit, annehmen kann, und es seien

$$\alpha^0 = \sum \alpha\varphi(\alpha), \quad \beta^0 = \sum \beta\psi(\beta) \ldots$$

$$m_1^2 = \sum(\alpha - \alpha^0)^2\varphi(\alpha); \quad m_2^2 = \sum(\beta - \beta^0)^2\psi(\beta)$$

die wahrscheinlichen Werte, bzw. die Quadrate der mittleren Abweichungen jeder einzelnen Variablen.

Sind die Variablen voneinander unabhängig, so ist nach dem Satze der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit $\varphi(\alpha_\lambda)\cdot\psi(\beta_\mu)\ldots$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zugleich α den Wert α_λ, β den Wert β_μ usw. annehmen; dieselbe Wahrscheinlichkeit besteht für das Stattfinden der Differenz

$$\alpha_\lambda + \beta_\mu + \cdots - \alpha^0 - \beta^0 - \gamma^0 \ldots$$

zwischen der Summe der Werte, die $\alpha, \beta \ldots$ angenommen haben, und der Summe der wahrscheinlichen Werte von $\alpha, \beta \ldots$.

Bezeichnen wir mit m die mittlere Abweichung der Größe $\alpha + \beta + \cdots$, so folgt aus der gegebenen Definition

$$m^2 = \sum{}^{(\alpha)}\sum{}^{(\beta)}(\alpha + \beta + \cdots - \alpha^0 - \beta^0 - \cdots)^2\varphi(\alpha)\psi(\beta)\cdots,$$

wo jede einzelne Summierung auf alle möglichen Werte der entsprechenden Variablen zu erstrecken ist. Wir behaupten, daß

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots. \qquad (12)$$

Wir können in der Tat schreiben

$$m^2 = \sum{}^{(\alpha)}\sum{}^{(\beta)}\{(\alpha - \alpha^0) + (\beta - \beta^0) + \cdots\}^2\varphi(\alpha)\psi(\beta)\cdots.$$

Die Entwicklung von $\{(\alpha - \alpha^0) + (\beta - \beta^0) + \cdots\}^2$ liefert die

Zerlegung von m^2 in Summen, die auf die Quadrate der Differenzen $\alpha - \alpha^0$, $\beta - \beta^0$, ... sich erstrecken:

$$\sum_{(\alpha)}\sum_{(\beta)}(\alpha - \alpha^0)^2\varphi(\alpha)\psi(\beta)\ldots$$

$$\sum_{(\alpha)}\sum_{(\beta)}(\beta - \beta^0)^2\varphi(\alpha)\psi(\beta)\ldots$$

und in Summen, die sich auf die Produkte $(\alpha - \alpha^0)(\beta - \beta^0)$, $(\alpha - \alpha^0)(\gamma - \gamma^0)$, beziehen:

$$-2\sum_{(\alpha)}\sum_{(\beta)}(\alpha - \alpha^0)(\beta - \beta^0)\varphi(\alpha)\psi(\beta)\ldots$$

$$-2\sum_{(\alpha)}\sum_{(\gamma)}(\alpha - \alpha^0)(\gamma - \gamma^0)\varphi(\alpha)\psi(\beta)\ldots.$$

Eine leichte Überlegung zeigt, daß

$$\sum_{(\alpha)}\sum_{(\beta)}(\alpha - \alpha^0)^2\varphi(\alpha)\psi(\beta)\cdots = \sum_{(\alpha)}(\alpha - \alpha^0)^2\varphi(\alpha)\sum_{(\beta)}\psi(\beta)\cdots = m_1^2$$

$$\sum_{(\alpha)}\sum_{(\beta)}(\beta - \beta^0)^2\varphi(\alpha)\psi(\beta)\cdots = \sum_{(\alpha)}\varphi(\alpha)\sum_{(\beta)}(\beta - \beta^0)^2\psi(\beta) = m_2^2$$

. . . .

. . . .

während die Entwicklung der Produkte $(\alpha - \alpha^0)(\beta - \beta^0)$, $(\alpha - \alpha^0)(\gamma - \gamma^0)$, ... und die wiederholte Anwendung der im vorigen Paragraphen bewiesenen Relation

$$\sum_{\alpha}\varphi(\alpha)(\alpha - \alpha^0) = 0$$

lehren, daß

$$\sum_{(\alpha)}\sum_{(\beta)}(\alpha - \alpha^0)(\beta - \beta^0)\varphi(\alpha)\psi(\beta)\ldots = 0$$

. . . .

ist. Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen, und zugleich die Ausdehnung des zuerst formulierten Tchebychefschen Satzes auf beliebig viele Variabele gerechtfertigt:

Es besteht eine Wahrscheinlichkeit P größer als $1 - \frac{1}{\lambda^2}$ *dafür, daß die Differenz* $|\alpha + \beta + \cdots - \alpha^0 - \beta^0 - \cdots|$ *das λ-fache der mittleren Abweichung nicht überschreitet.*

15. Beachten wir, daß, wie man unmittelbar einsieht,

$$m^2 = (\alpha^2)^0 + (\beta^2)^0 + \cdots - (\alpha^0)^2 - (\beta^0)^2 - \cdots,$$

so erhalten wir aus dem vorhergehenden Satze, indem wir die Anzahl der Variablen gleich n voraussetzen, und $\lambda = \frac{\sqrt{n}}{t}$ annehmen, den folgenden:

II. *Die Wahrscheinlichkeit W dafür, daß*

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}{n}$$

enthalten ist zwischen den Grenzen

$$\frac{\alpha^0 + \beta^0 + \cdots}{n} - \frac{1}{t}\sqrt{\frac{(\alpha^2)^0 + (\beta^2)^0 + \cdots}{n} - \frac{(\alpha^0)^2 + (\beta^0)^2 + \cdots}{n}}$$

und

$$\frac{\alpha^0 + \beta^0 + \cdots}{n} + \frac{1}{t}\sqrt{\frac{(\alpha^2)^0 + (\beta^2)^0 + \cdots}{n} - \frac{(\alpha^0)^2 + (\beta^0)^2 + \cdots}{n}},$$

ist größer als $1 - \frac{t^2}{n}$.

Durch Vergrößerung von t können wir die genannten Grenzen beliebig verengen: lassen wir also n und t so wachsen, daß $1 - \frac{t^2}{n}$ mit beständig wachsendem n der Einheit als Grenze sich nähert, und bemerken wir, daß, falls $(\alpha^2)^0$, $(\beta^2)^0$, ... eine feste Grenze nicht überschreiten, auch die arithmetischen Mittel $\frac{(\alpha^2)^0 + (\beta^2)^0 + \cdots}{n}$, $\frac{(\alpha^0)^2 + (\beta^0)^2 + \cdots}{n}$, und die im Satze II vorkommende Wurzelgröße, wie groß auch n sein möge, unter einer festen Grenze bleiben, so erscheint der neue Satz erwiesen:

III. *Wenn* $\alpha^0, \beta^0, \ldots; (\alpha^2)^0, (\beta^2)^0, \ldots$ *endlich sind, so nähert die Wahrscheinlichkeit W, daß die Differenz*

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}{n} - \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 + \cdots}{n}$$

kleiner ist als eine beliebig klein gesetzte Größe, mit wachsendem n der Einheit.

§ 4. Betrachtung eines partikulären Falles: Die Sätze von Poisson und Bernoulli.

16. Die Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ seien der Werte 1 und 0 fähig, und zwar mögen den Werten $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \ldots, \alpha_n = 1$

die Wahrscheinlichkeiten p_1, bzw. $p_2, \ldots p_n$ entsprechen. Dann sind $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2, \ldots, q_n = 1 - p_n$ die Wahrscheinlichkeiten, welche den Werten $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots \alpha_n = 0$ zuzuordnen sind, und es ist

$$\alpha_1{}^0 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot q_1 = p_1, \quad \alpha_2{}^0 = 1 \cdot p_2 + 0 \cdot q_2 = p_2, \ldots,$$
$$\alpha_n{}^0 = 1 \cdot p_n + 0 \cdot q_n = p_n$$
$$(\alpha_1{}^2)^0 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot q_1 = p_1, \quad (\alpha_2{}^2)^0 = 1 \cdot p_2 + 0 \cdot q_2 = p_2, \ldots,$$
$$(\alpha_n{}^2)^0 = 1 \cdot p_n + 0 \cdot q_n = p_n.$$

Nach dem Satze III, dessen Voraussetzungen hier offenbar erfüllt sind, nähert sich die Wahrscheinlichkeit $W > 1 - \frac{t^2}{n}$ dafür, daß sich das Verhältnis

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$$

der Summe der wirklich beobachteten Werte der Variablen α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ in den n Versuchen zu der Anzahl der Versuche, zwischen den Grenzen

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n} \mp \sqrt{\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n} - \frac{p_1{}^2 + p_2{}^2 + \cdots p_n{}^2}{n}}$$

befinden werde, mit wachsendem n der Einheit, wie groß man auch t gewählt hat.

Dies ist der wesentliche Inhalt des folgenden Satzes von Poisson:

Bestehen die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dafür, daß ein Ereignis E im ersten, bzw. im zweiten, ... im n^{ten} Versuche eintritt, und ist r die Anzahl der Versuche, bei denen es eingetreten ist, n die Anzahl der überhaupt gemachten Versuche, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{r}{n} = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}. \tag{13}$$

Wir können $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$ annehmen. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{r}{n} = p. \tag{14}$$

Durch Gleichung (14) ist der Bernoullische Satz im wesentlichen ausgesprochen.

17. Wir hätten die zwei Sätze von Bernoulli und Poisson schon aus dem ersten Satze von Tchebychef und aus bekannten Relationen ableiten können.

Es gelte das durch die Entwicklung $(p + q)^n$ definierte Wahrscheinlichkeitsgesetz: d. h. es sei $\varphi(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in n Versuchen das Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, r mal vorkommt.

Im Falle des Poissonschen Satzes ist die mittlere Abweichung durch

$$\sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n} = \sqrt{n} \sqrt{\frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} - \frac{p_1{}^2 + \cdots + p_n{}^2}{n}}$$

definiert (§ 2, (9), § 3, (12)): nach Satz I besteht eine Wahrscheinlichkeit $W > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$ dafür, daß sich $\frac{r}{n}$ innerhalb der Grenzen

$$\frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} \pm \frac{\sqrt{n}}{t} m = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}$$
$$\pm \frac{1}{t} \sqrt{\frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} - \frac{p_1{}^2 + \cdots + p_n{}^2}{n}}$$

befindet, was wir eben in 16 bewiesen haben. Der ganz spezielle Fall, wo

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n$$

braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden.

18. Ist $\lambda = 3$, so ist $W > 1 - \frac{1}{9} = 0{,}888\ldots$ Wir werden Gelegenheit haben, zu zeigen, daß die Hypothesen, welche dem Bernoullischen Satze zugrunde liegen, eine genauere Bestimmung von W gestatten, und daß man mit praktisch genügender Annäherung $W = 0 \cdot 9973$ setzen kann. Man findet ferner

für	$\lambda = 3{,}5$	$W = 0 \cdot 99953$
	$4{,}0$	$= 0 \cdot 99994$
	$4{,}5$	$= 0 \cdot 999993$
	$5{,}0$	$= 0 \cdot 9999994$

Abweichungen, welche das Dreifache der mittleren Abweichung überschreiten (und *a fortiori*, welche Vielfache der mittleren Abweichung überschreiten, die größer sind als das Dreifache) entsprechen also sehr kleine Wahrscheinlichkeiten: es besteht eine der absoluten Sicherheit (welcher, wie wir gesehen haben, die Wahrscheinlichkeit 1 entspricht) nahe kommende Wahrscheinlich-

keit dafür, daß solche Abweichungen überhaupt nicht vorkommen. Wir können auch sagen, es ist moralisch sicher, daß solche Abweichungen überhaupt nicht vorkommen. Dabei verstehen wir unter moralischer Sicherheit eine auf Ereignisse bezügliche Erwartung, welcher sehr wenig von der Einheit abweichende Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

Damit haben wir jedenfalls die Möglichkeit gewonnen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Probleme anzuwenden, welche von den bis jetzt betrachteten Problemen abweichen. Wir brauchen in der Tat nicht mehr anzunehmen, es sei möglich, die Wahrscheinlichkeit so zu bestimmen, wie wir sie bis jetzt definiert haben, und beschränken uns darauf, die Zulässigkeit einer solchen Bestimmung vorauszusetzen.

Es sei eine sehr große Anzahl n von Versuchen gemacht worden, wobei das betrachtete Ereignis r mal eingetreten ist. So z. B. seien aus einer Urne, welche bis auf die Farbe gleiche Kugeln enthält, n Kugeln herausgenommen worden, unter denen r rot sein mögen.

$\frac{r}{n}$ nennen wir die Wahrscheinlichkeit *a posteriori* des betrachteten Ereignisses; im speziellen Falle, die Wahrscheinlichkeit a posteriori dafür, daß eine rote Kugel gezogen wird.

Die bewiesenen Sätze besagen, daß es mit einer Wahrscheinlichkeit, deren untere Grenze wir angeben können, zu erwarten ist, daß der absolute Wert der Differenz zwischen der Wahrscheinlichkeit a posteriori und der Wahrscheinlichkeit, wie wir sie definierten (der Wahrscheinlichkeit *a priori*) innerhalb vorgeschriebener Grenzen bleibt. Für $n = \infty$ stimmen die beiden Wahrscheinlichkeiten überein. Praktisch werden wir eine solche Übereinstimmung auch für sehr große Werte von n annehmen, und die Wahrscheinlichkeit *a priori* durch die Ermittelung der entsprechenden Häufigkeitskoeffizienten $\frac{r}{n}$ angenähert bestimmen. Die Probleme, bei denen eine solche Bestimmung bezweckt wird, sind in bezug auf die theoretischen Anwendungen von größter Wichtigkeit.

Fundamental ist unter ihnen das Problem, aus welchem die Fehlertheorie entstanden ist.

§ 5. Das Gaußsche Fehlergesetz. Die Methode der kleinsten Quadrate.

19. Man hat eine unbekannte physische Größe n mal mit konstanter Sorgfalt und mit denselben Instrumenten beobachtet und die Werte $x_1, x_2 \ldots x_n$ erhalten. Wir nehmen an, daß keine Fehler vorhanden waren, welche bei allen Beobachtungen in derselben Richtung gewirkt haben. Mit anderen Worten nehmen wir an, daß die Verschiedenheit der Werte x, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß der Fehler jeder einzelnen Beobachtung aus einem Ursachenkomplexe entstanden ist, der nicht in angebbarer Weise wirkte, so daß sich keine bestimmte Aussage über die Größe oder das Vorzeichen der Fehler machen läßt. Solche Fehler nennen wir *zufällig* im Gegensatz zu den *regelmäßigen* oder *systematischen* Fehlen, deren Einfluß auf die Beobachtung wir uns entweder durch Berichtigung der Instrumente oder der beobachteten Zahlen eliminiert denken.

Wir postulieren die Existenz einer Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ dafür, daß ein Fehler zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ enthalten ist: die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ nennen wir das „Fehlergesetz".[1])

Diese Annahme findet ihre Begründung darin, daß die Häufigkeit eines Fehlers von seiner Größe abhängen wird. Es ist z. B. anzunehmen, daß sehr große Fehler bei einer gewissen Genauigkeit der Beobachtung überhaupt nicht vorkommen werden. Sie ist aber auch willkürlich, denn die Feststellung eines Zusammenhanges zwischen der Größe und der Häufigkeit eines Fehlers reicht nicht hin, um *a priori* die Existenz einer Wahrscheinlichkeit der Fehler zu behaupten, welche eine numerisch definierte Funktion der Fehlergröße ist.

Wir fragen, welche Form der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zu erteilen sei. Die Frage hat man mit der anderen in Verbindung gesetzt: welches ist das Resultat, das man erreichen will? *Gauß* hat verlangt, daß der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten x das arithmetische Mittel aus den direkten Beobachtungsresultaten sei.[2])

1) Gauß hat sie sowohl „probabilitas errori tribuenda" wie „facilitas relativa" genannt. An die zweite Bezeichnung erinnert das „law of facility of errors" der englischen Schriftsteller.

2) Vgl. über die primitiveren Postulate, auf welche das Prinzip des arithmetischen Mittels zurückgeführt werden kann, *Schiaparelli*, *Come si*

Aus

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

folgt

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_0) + \cdots + (x_n - x_0) = 0$$

und, falls wir die *scheinbaren Fehler* $x_i - x_0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ mit λ_i bezeichnen,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die in den n Beobachtungen begangenen Fehler bzw. gleich $x - x_1, x - x_2, \ldots x - x_n$ sind, ist auf Grund des Satzes der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit proportional dem Produkte

$$\varphi(x - x_1)\,\varphi(x - x_2) \ldots \varphi(x - x_n) .$$

Mit $\Phi(x)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit *a posteriori*, daß, wenn die Messung die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergeben hat, x der wahre Wert der gemessenen Größe sei, und nehmen zunächst an, daß

$$\Phi(x) = k\,\varphi(x - x_1)\,\varphi(x - x_2) \ldots \varphi(x - x_n),$$

wo k eine Konstante bedeutet.

20. Die Frage der Bestimmung von $\Phi(x)$ ist folgender Natur: ein Ereignis kann zustande kommen, indem verschiedene sich gegenseitig ausschließende Tatbestände es hervorbringen. Trifft das Ereignis zu, und sind die Wahrscheinlichkeiten des Wirkens jedes einzelnen Tatbestandes sowie die Wahrscheinlichkeiten bekannt, daß, falls ein bestimmter Tatbestand wirkt, das Ereignis eintritt, so wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß das beobachtete Ereignis aus einem bestimmten Tatbestande hervorgegangen ist.

Man nennt die möglichen Tatbestände die „Ursachen“ des Ereignisses, die Probleme der betrachteten Klasse die Probleme der Wahrscheinlichkeiten von Ursachen.

Hier kann die Gruppe der beobachteten Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ als das eingetretene Ereignis, jeder mit der Gruppe verträgliche Wert der unbekannten Größe x als seine Ursache gelten.

---

possa giustificare l'uso della media aritmetica nel calcolo delle misure senza fare alcuna ipotesi sulla legge di probabilità degli errori accidentali, Astronomische Nachrichten, Bd. 176, 13.

Wir wollen zunächst den Fall endlich vieler Ursachen allgemein behandeln.

Es sei M_A die Untermenge der Elemente einer Menge M, denen eine gewisse wohldefinierte Eigenschaft A zukommt, und es seien die Ereignisse definiert

$$E = [M, M_A], \quad C_i = [M, M_{B_i}] \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ist dann M_{AB_i} der „Schnitt“ $\vartheta(M_A, M_{B_i})$ der Untermengen M_A und M_{B_i} von M (vgl. § 1, 2) und

$$p_{C_i}(E) = p([M_{B_i}, M_{AB_i}]), \quad p_E(C_i) = p([M_A, M_{AB_i}])$$
$$p(EC_i) = p([M, M_{AB_i}]),$$

so folgt aus dem Satze der totalen Wahrscheinlichkeit

$$p(E) = \sum p(EC_i) \tag{15}$$

und aus der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdefinition

$$p(EC_i) = p_{C_i}(E)\,p(C_i) = p_E(C_i)\,p(E).$$

Hieraus und aus Gl. (15) erhält man:

$$p_E(C_k) = \frac{p(C_k)\,p_{C_k}(E)}{\sum\limits_{(i)} p_{C_i}(E)\,p(C_i)}. \tag{16}$$

Die C_i entsprechen den verschiedenen Entstehungsmodi des Ereignisses E: wir nennen sie die „Ursachen von E“. Es wird dann auch $p_{C_i}(E)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bedeuten, daß, falls C_i wirkt, das Ereignis E eintritt, und $p_E(C_k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ursache C_k das Eintreten von E hervorgerufen hat.

Die Gleichung (16) wird die Bayessche Regel genannt.[1]) Entsprechen allen Ursachen dieselben Wahrscheinlichkeiten, d. h. ist

$$p(C_1) = p(C_2) = \cdots p(C_n),$$

so nimmt sie die einfachere Form an

$$p_E(C_k) = \frac{p_{C_k}(E_k)}{\sum\limits_{(i)} p_{C_i}(E)}. \tag{17}$$

---

1) Vgl. Hausdorff, Sächsische Berichte, Bd. 53, Seite 150 und ff. Die Heranziehung der Bayesschen Regel ist keineswegs unentbehrlich: doch bietet ihre Ableitung eine interessante Anwendung der vorher eingeführten Begriffe.

Der Gleichung (16) und der Gleichung (17) entsprechend werden wir in dem uns hier beschäftigenden Falle einer unbegrenzten Menge möglicher Ursachen haben

$$p(x) = \frac{\chi(x)\psi(x)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\chi(x)\,dx}$$

bzw.

$$p(x) = \frac{\psi(x)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,dx},$$

wo die $p(x)$ an die Stelle von $p_E(C_k)$ tritt, und $\chi(x)$ bzw. $\psi(x)$ die $p(C_i)$ bzw. die $p_{C_i}(E)$ ersetzen.

Es ist für uns $\psi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit eines in das Intervall $(x, x + dx)$ fallenden Wertes der Unbekannten x, $\chi(x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß, während x den bestimmten Wert x hat, die n gemachten Beobachtungen Werte liefern, welche bzw. in den durch die Grenzen

$$x_1 \text{ und } x_1 + dx_1, \quad x_2 \text{ und } x_2 + dx_n, \ldots, x_n \text{ und } x_n + dx_n$$

definierten Intervallen enthalten sind. Es ist also, wie wir schon gesehen haben,

$$\chi(x) = dx_1\,dx_2 \ldots dx_n\,\varphi(x_1 - x)\,\varphi(x_2 - x) \ldots \varphi(x_n - x),$$

so daß wir haben

$$\psi(x)\chi(x)\,dx = dx\,dx_1 \ldots dx_n\,\psi(x)\,\varphi(x_1 - x) \ldots \varphi(x_n - x)$$

und als Ausdruck der gesuchten Wahrscheinlichkeit $\Phi(x)dx$

$$\Phi(x)\,dx = \frac{dx\,dx_1 \ldots dx_n\,\psi(x)\,\varphi(x_1 - x) \ldots \varphi(x_n - x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,\varphi(x_1 - x) \ldots \varphi(x_n - x)}$$

$$= \frac{\psi(x)\,\varphi(x_1 - x) \ldots \varphi(x_n - x)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,\varphi(x_1 - x)\,\varphi(x_2 - x) \ldots \varphi(x_n - x)\,dx}.$$

Es ist

$$\Phi(x) = k\chi(x) = k\varphi(x_1 - x) \ldots \varphi(x_n - x)$$

falls, wie wir annehmen wollen,

$$\psi(x) \equiv 1$$

und

$$\frac{1}{k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_1 - x)\,\varphi(x_2 - x) \ldots \varphi(x_n - x)\,dx$$

ist.

21. Das formulierte Prinzip, daß der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten x das arithmetische Mittel

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

aus den direkten Beobachtungsresultaten $x_1 x_2 \cdots x_n$ sei, erfordert also einfach, daß wir

$$\varphi(x_1 - x_0)\,\varphi(x_2 - x_0) \ldots \varphi(x_n - x_0)$$

für $x = x_0$ zu einem Maximum machen. Wir erhalten, indem wir logarithmisch differentiieren und die gewonnene Ableitung gleich Null setzen,

$$\frac{\varphi'(x_1 - x_0)}{\varphi(x_1 - x_0)} + \frac{\varphi'(x_1 - x_0)}{\varphi(x_2 - x_0)} + \cdots + \frac{\varphi'(x_n - x_0)}{\varphi(x_n - x_0)} = 0$$

oder, falls wir der Kürze halber $x_i - x_0 = \lambda_i$, $\frac{\varphi'(\lambda_i)}{\varphi(\lambda_i)} = \psi(\lambda_i)$ schreiben,

$$\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2) + \cdots + \psi(\lambda_n) = 0.$$

Aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$$

$$\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2) + \cdots + \psi(\lambda_n) = 0$$

folgern wir durch Ableitung nach den λ

$$\psi'(\lambda_1)\,d\lambda_1 + \psi'(\lambda_2)\,d\lambda_2 + \cdots + \psi'(\lambda_n)\,d\lambda_n = 0$$

$$d\lambda_1 + d\lambda_2 + \cdots + d\lambda_n = 0.$$

Wir erhalten, indem wir die zweite Gleichung mit $-2k$ multiplizieren, und sie zu der ersten addieren:

$$(\psi'(\lambda_1) - 2k)\,d\lambda_1 + \cdots + (\psi'(\lambda_n) - 2k)\,d\lambda_n = 0$$

eine Gleichung, welche, wegen der angenommenen Unabhängigkeit der λ voneinander nur dann bestehen kann, falls ihre Glieder identisch Null sind. Man hat also

$$\psi'(\lambda) = 2k$$

$$\psi(\lambda) = 2k\lambda.$$

Aus

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \psi(\lambda)$$

folgt weiter

$$\varphi(\lambda) = Ce^{k\lambda^2},$$

wo log C die Integrationskonstante bedeutet. Die Annahme, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers eine abnehmende Funktion seiner Größe sei, führt zu der Annahme, daß k eine negative Konstante sei. Wir werden also schreiben

$$\varphi(\lambda) = Ce^{-h^2\lambda^2}.$$

Es soll aber offenbar sein

$$C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\lambda^2} d\lambda = 1$$

oder, falls wir $h\lambda = t$ setzen,

$$\frac{C}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

ist. Das gesuchte Fehlergesetz ist also

$$\varphi(\lambda) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda^2} = \frac{h}{\pi} e^{-h^2(x-x_0)^2}, \tag{18}$$

wo der Parameter h noch zu bestimmen bleibt.

22. Aus dem Prinzip des arithmetischen Mittels folgt Gleichung (18). Umgekehrt können wir behaupten, daß das genannte Prinzip aus der Gleichung (18) seinerseits abgeleitet werden kann.

Sind

$$\varepsilon_1 = X - x_1$$
$$\varepsilon_2 = X - x_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

die Fehler, die man in der Bestimmung der Größe X begangen hat, so ist

$$e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots \varepsilon_n^2)} \tag{19}$$

nach (18) proportional der Wahrscheinlichkeit, daß dieselben bzw. gleich $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ sind. Der Ausdruck (19) wird zu einem Maximum, falls

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = \text{Minimum},$$

d. h. falls

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{20}$$

Gleichung (20) enthält die einfachste Formulierung des Fundamentalprinzips der Methode der kleinsten Quadrate, nach welcher das vorteilhafteste System von Werten der unbekannten Größen dasjenige ist, welches die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler zu einem Minimum macht.

Gegen das Gaußsche Postulat wird geltend gemacht, daß das arithmetische Mittel nicht mit dem wahrscheinlichsten Werte übereinstimmen sollte, sondern mit dem wahrscheinlichen Werte. Nur bei der Bestimmung dieses letzteren ziehen wir alle die Werte in Betracht, welche die zu bestimmende Variable annimmt: der wahrscheinlichste Wert, welcher nur durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \text{Maximum}$$

definiert wird, kann beträchtlich von allen anderen Werten abweichen. Der Einwand ist zweifelsohne begründet; die Betrachtung von Gesetzen, welche allgemeiner sind als das Gaußsche, und nach welchen das arithmetische Mittel mit dem wahrscheinlichen Werte identifiziert wird, zeigt jedoch, daß seine Tragweite nur beschränkt ist.[1])

Ferner wird der Einwand erhoben, daß das Gesetz kontinuierlich ist, während die Fehler eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, und daß, während diese nach dem definierten Gesetze im ganzen Intervall $(-\infty, +\infty)$ verteilt sind, praktisch doch nur Fehler auftreten können, deren Betrag angebbare endliche Grenzen nicht überschreitet.

Eine leichte Überlegung zeigt, daß der erste Einwand auf eine sehr ausgedehnte Klasse von Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf physische Probleme ausgedehnt werden kann, die in Zweckmäßigkeits- und Einfachheitsrücksichten ihre Berechtigung finden. Wir können im allgemeinen die Hypothese der Stetigkeit

1) Vgl. Poincaré, Calcul des Probabilités, pag. 153—156. — Bertrand, Calc. d. Prob. Chap. VIII.

nur auf den Umstand gründen, daß sie nicht zu Resultaten führt, welche der sinnlichen Wirklichkeit widersprechen.[1]) Außerdem ist es praktisch ziemlich gleichgültig, daß den Fehlern, welche nicht im Gebiete der Möglichkeit liegen, Wahrscheinlichkeiten entsprechen, die nicht Null sind, wenn dieselben so klein sind, daß wir sie vernachlässigen können. Dieser Forderung genügt eben die definierte Form der Funktion $\varphi(\varepsilon)$, welche sehr rasch mit dem Zunehmen von $|\varepsilon|$ abnimmt.

Jedenfalls findet das *Gauß*sche Fehlergesetz normalerweise seine Bestätigung in der Erfahrung: die Verteilung einer sehr großen Anzahl von Beobachtungen, deren Fehler bekannt sind, nach der Größe dieser letzteren kommt im allgemeinen der Verteilung genügend nahe, welche die Gaußsche Funktion definiert. Ferner kann bewiesen werden, daß, falls der Fehler die Resultante einer unendlich großen Anzahl von Ursachen ist, das Verteilungsgesetz der Fehler genau dasjenige ist, das die genannte Funktion definiert.[2])

Wir können eine solche Hypothese als Ausgangspunkt nehmen, indem wir postulieren, daß der beobachtete Fehler ε aus den Elementarfehlern

$$\varepsilon' \quad \varepsilon'' \quad \varepsilon''' \ldots$$

zusammengesetzt ist, welche bzw.

$$n' \quad n'' \quad n'''$$

Werte annehmen können; $n' n'' n''' \ldots$, drückt dann die Anzahl der verschiedenen Werte des Gesamtfehlers

$$\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \cdots = \varepsilon$$

aus.

Die Möglichkeit einer solchen Ableitung ist besonders für die Betrachtung statistischer Erscheinungen wichtig. Letztere stellen sich in der Tat als die Resultanten aus einer sehr großen Anzahl von Erscheinungen dar, die sich auf jedes der Individuen beziehen, welche zu den in Betracht gezogenen statistischen Gesamtheiten gehören; ist der Verlauf jeder Einzelerscheinung vom Verlauf aller übrigen unabhängig, so kann die Zusammensetzung der Einzelerscheinungen zu Gesamterscheinungen so erfolgen wie die Zusammensetzung der Elementarfehler zu Gesamtfehlern und zu einem Verteilungsgesetze Anlaß geben, das mit dem Gaußschen identisch ist, oder diesem sehr nahe kommt.

1) Es kann überdies gezeigt werden, daß die Stetigkeit aus der Hypothese des arithmetischen Mittels folgt, wenn man den Fall ausschließt, daß die Funktion an jeder Stelle jedem beliebigen Werte nahe kommt. (Vgl. Bernstein, Mathematische Annalen, Bd. 63.)

2) Pizzetti Fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali, in Atti della Università di Genova, 180, 2, pag. 11—23.

23. Aus

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

oder, falls a der wahre Wert ist, und $\varepsilon = x - a$, aus

$$\varphi(x - a) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x-a)^2}$$

folgt

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-h^2(x-a)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\delta} e^{-t^2} dt = \Phi(h\delta) \qquad (21)$$

als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Beobachtung einen Wert des Intervalls $(a - \delta,\ a + \delta)$ liefert, oder, was genau dasselbe ist, daß der wirkliche Fehler dem Intervall $(-\delta, +\delta)$ angehört. Wird

$$\Phi(h\delta) = \text{Constans}$$

angenommen, so variieren h und δ in umgekehrtem Sinne, andererseits ist das Intervall 2δ desto größer, je kleiner die Genauigkeit der Beobachtungen ist. h kann also als Genauigkeitsmaß der Beobachtungen gelten.

Wir wollen den wahrscheinlichen Wert des Fehlers und den mittleren Fehler bestimmen, indem wir die Gültigkeit des Gaußschen Gesetzes annehmen. Nach der gegebenen Definition und gemäß der Stetigkeit der Funktion φ werden die zwei Größen durch

$$\varepsilon^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon)$$

bzw. durch

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)$$

ausgedrückt. Wir bekommen, indem wir den Wert von φ einsetzen:

$$\varepsilon^0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\infty} te^{-t^2}dt - \int_0^{-\infty} te^{-t^2}dt\right]$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\infty} te^{-t^2}dt - \int_0^{\infty} ze^{-z^2}dz\right] = 0,$$

wobei $z = -t$ ist. Ebenso bekommen wir

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2h^2}$$

da, nach einer aus der Integralrechnung bekannten Formel

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$$ [1])

ist. Das erste Resultat hätten wir sehr leicht voraussehen können. Die Form der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ sagt nicht nur aus, daß die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers eine abnehmende Funktion seiner Größe ist, und daß sie ihren größten Wert bei $\varepsilon = 0$ hat, sondern auch, daß entgegengesetzt gleichen Fehlern gleiche Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Es ist in der Tat $\varphi(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$.

Das arithmetische Mittel der Fehler und der spezielle Mittelwert derselben, den wir ihren wahrscheinlichen Wert nannten, können also nur Null sein.[2]) Die zweite Gleichung liefert die sehr

1) Vgl. die Noten am Ende dieses Kapitels.

2) Dagegen ist natürlich von Null verschieden der wahrscheinliche Wert des Moduls $|\varepsilon|$ von ε.

Wir finden, falls wir ihn mit δ bezeichnen,

$$\vartheta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} te^{-t^2}dt = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Die Größe δ (*der durchschnittliche Fehler*) wurde von Laplace als die *erreur moyenne* einer Reihe von Beobachtungen bezeichnet und spielt bei ihm genau dieselbe Rolle, die in der Gaußschen Ableitung der mittlere

einfache Relation zwischen dem mittleren Fehler und dem Genauigkeitsmaß

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}. \tag{22}$$

Die durch (21) eingeführte Funktion

$$\Phi(h\delta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\delta} e^{-t^2} dt$$

drückt, falls wir $\delta = \lambda m$ setzen und die Gleichung (22) berücksichtigen, die Wahrscheinlichkeit

Fehler spielt. Nach Gauß widerstrebt der durchschnittliche Fehler in höherem Grade der analytischen Behandlung und führt zu weniger einfachen Resultaten als der mittlere. Indessen können praktisch die beiden Größen als äquivalent in bezug auf die möglichen Anwendungen gelten, und es kommt dem durchschnittlichen Fehler der Vorzug einer einfacheren Bestimmung zu.

Wir verzichten hier darauf, zu beweisen, daß der mittlere Fehler m und der durchschnittliche ϑ als Funktionen der scheinbaren Fehler λ (der einzigen, die man im allgemeinen kennt) definiert, bzw. gleich

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}, \quad \vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

sind, wobei

$$[\lambda] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$
$$[\lambda\lambda] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2,$$

und daß, während im allgemeinen das Integral

$$J_r = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \varepsilon^r e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^r\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^r e^{-t^2} dt$$

(r ganzzahlig), das umgekehrt proportional zu h^2 ist, ebensogut wie h oder wie m und ϑ, als Genauigkeitsmaß gelten kann, die Raschheit der Konvergenz der Summen

$$\frac{[\varepsilon^r]}{n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{[|\varepsilon^r|]}{n}$$

zu J_r doch nicht unabhängig von r ist. Sie ist am größten für $r = 2$, und das genügt, um den mittleren Fehler als den sichersten Ausdruck der Genauigkeit der Beobachtungen zu charakterisieren; sie weicht aber für $r = 1$ nicht sehr stark von derjenigen ab, die dem Werte $r = 2$ entspricht.

Wir verweisen für die Ableitung der ersten Formeln auf die gewöhnlichen Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung, für die Begründung der zweiten Aussage auf *Helmert, Zeitschr. f. Math. u. Phys.* XXI. (1876).

$$\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt$$

aus, daß der beobachtete Fehler das λ-fache des mittleren Fehlers nicht überschreitet. Es ist allgemeiner

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der absolute Betrag des Fehlers nicht größer ist als $\frac{\gamma}{h}$.

Einige für die Anwendungen besonders wichtige Werte der Funktion $\Phi(\gamma)$ sind in der Tafel I enthalten.

24. Das Problem, das wir in Nr. 22 behandelten, ist ein besonderer Fall des anderen: es sind n Beobachtungen gemacht worden, deren Genauigkeiten bzw. durch $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ausgedrückt werden. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die beobachteten Zahlen, so fragt man nach dem wahrscheinlichsten Werte X_1 der unbekannten gemessenen Größe X.

Die Wahrscheinlichkeit, die man in diesem Falle zu einem Maximum zu machen hat, ist also die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n$$

des Fehlersystems

$$\varepsilon_1 = X - x_1, \quad \varepsilon_2 = X - x_2, \ldots, \varepsilon_n = X - x_n.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist:

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \varepsilon_i^2 = \text{Minimum}.$$

Sie führt zu den Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 (X_1 - x_i) = 0$$

$$X_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2},$$

die für $h_1 = h_2 = \cdots h_n$ den bekannten Ausdruck liefern

$$X_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}.$$

Ist das Größensystem $p_1, p_2, \ldots, p_n$ so definiert, daß

$$h_1^2 : h_2^2 : \cdots : h_n^2 = p_1 : p_2 : \cdots : p_n$$

ist, so nennt man es das System der *Gewichte*. Einer Beobachtung vom Gewicht p entsprechen p Beobachtungen vom Gewicht 1. Dies ist wohl die einfachste Definition des eingeführten Begriffes.

Sind bzw. h und h', p und p', m und m' die Genauigkeitsmaße, die Gewichte und die mittleren Fehler zweier bestimmten Beobachtungen, so folgt aus

$$p : p' = h^2 : h'^2$$

und aus Gleichung (22)

$$p : p' = m'^2 : m^2.$$

Die Gewichte sind den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportional. Wird $p = 1$ angenommen, so ist

$$m' = \frac{m}{\sqrt{p'}}. \tag{23}$$

Der mittlere Fehler m' einer Reihe von Beobachtungen, deren Gewicht p' ist, wird erhalten, indem man den dem Gewicht 1 entsprechenden mittleren Fehler durch $\sqrt{p'}$ dividiert. Man leitet daraus ab, daß Beobachtungen verschiedener Genauigkeit, mit der Quadratwurzel aus ihren Gewichten multipliziert, als Beobachtungen desselben Gewichts betrachtet und behandelt werden können.

25. Das Problem, das der Methode der kleinsten Quadrate zugrunde liegt, ist nun das folgende: Sind m Unbekannte durch Beobachtung bestimmt, aber deart, daß sie nicht direkt, sondern in bekannten Verbindungen $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m)$ beobachtet sind, welche die unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$ enthalten, und deren Anzahl $n > m$ ist, so handelt es sich darum, aus dem System

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots x_m) = l_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_m) = l_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_m) = l_n \end{array}\right\} \tag{24}$$

das plausibelste System der Werte der Unbekannten zu bestimmen.

Hierin sind $f_1, f_2, \ldots f_n$ bekannte Funktionen, $l_1, l_2, \ldots l_n$ die beobachteten Werte derselben.

Es kann, ohne der Allgemeinheit zu schaden, angenommen werden:

a) daß die Gleichungen des Systems dasselbe Gewicht haben. Ist dies nicht der Fall, so können wir, nach den Ergebnissen der vorhergehenden Nummer, jede der Gleichungen mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewichte multiplizieren.

b) daß alle Gleichungen linear sind.

Nehmen wir an, daß die Forderung b) nicht erfüllt sei. Wir greifen aus dem System m Gleichungen heraus, aus denen wir Näherungswerte $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ der Unbekannten bestimmen. Die Differenzen zwischen den dadurch bestimmten Werten und den gesuchten $x_1, x_2, \ldots x_n$, die wir bzw. mit $\xi_1 = x_1^0 - x_1$, $\xi_2 = x_2^0 - x_2, \ldots \xi_n = x_n^0 - x_n$ bezeichnen wollen, können so gewählt werden, daß wir in den Taylorschen Entwicklungen der $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m)$ die in $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ quadratischen und höheren Glieder vernachlässigen können. Es ist dann

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_m) = f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0) + \xi_1 \frac{\partial f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)}{\partial x_1^0}$$
$$+ \xi_2 \frac{\partial f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)}{\partial x_2^0} + \cdots + \xi_m \frac{\partial f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)}{\partial x_m^0}$$

Falls wir schreiben:

$$f_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0) = A_i$$
$$\frac{\partial f_i^0}{\partial x_1} = a_i, \quad \frac{\partial f_i^0}{\partial x_2} = b_i,$$

können wir an die Stelle von

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_m) = l_i$$

die lineare Gleichung

$$A_i + a_i \xi_1 + b_i \xi_2 + \cdots = l_i$$

setzen.

26. Wir haben also das Problem auf das andere zurückgeführt, aus den n linearen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x_1 + b_1 x_2 + \cdots = l_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + \cdots = l_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x_1 + b_n x_2 + \cdots = l_n \end{array}\right\} \qquad (25)$$

m Unbekannte zu bestimmen $(n > m)$.

Das Problem ist überbestimmt. Wir fragen nach dem Wertesystem $X_1, X_2, \ldots X_m$, das die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum macht. Die notwendige Bedingung dafür, daß

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i x_1 + b_i x_2 + \cdots - l_i)^2 = \psi(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

zu einem Minimum wird, ist offenbar das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial \psi}{\partial x_m} = 0. \qquad (26)$$

Das Problem ist damit völlig bestimmt: wir haben m Gleichungen, aus denen die m Unbekannten bestimmt werden können.

Wie das geschieht, läßt sich sehr leicht angeben.

Setzt man zur Abkürzung

$$a_i x_1 + b_i x_2 + \cdots - l_i = \varepsilon_i,$$

so sind offenbar die m Gleichungen des Systems (26)

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n = 0$$
$$\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_n b_n = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Diese werden, falls man für die Größen ε ihre Ausdrücke einsetzt, nach den Unbekannten x ordnet und der kürzeren Schreibweise halber die Gaußsche Notation

$$[\alpha\alpha] = \alpha_1{}^2 \alpha_2{}^2 + \cdots$$
$$[\alpha\beta] = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots$$

benutzt, zu

$$[aa]x_1 + [ab]x_2 + \cdots = [al]$$
$$[ab]x_1 + [bb]x_2 + \cdots = [bl]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[ak]x_1 + [bk]x_2 + \cdots + [kk]x_m = [kl].$$

Es handelt sich nun darum, aus diesem System — der *Normalgleichungen* — die gesuchten m Werte $X_1, X_2, \ldots X_m$ zu bestimmen.

Der Gaußsche Algorithmus der sukzessiven Elimination besteht darin, daß man aus der ersten Gleichung x_1 durch $x_2 \ldots x_m$ ausdrückt und diesen Wert in die folgenden Gleichungen substituiert.

Es entsteht ein System von $m-1$ Gleichungen mit $m-1$ Unbekannten. Aus der $(m-1)$-maligen Wiederholung des Prozesses entstehen m Systeme von Gleichungen, deren jedes bzw. aus $m, m-1$, Gleichungen besteht.

Beschränken wir uns auf das System von vier Gleichungen:

$$[aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [ad]x_4 = [al]$$
$$[ab]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bd]x_4 = [bl]$$
$$[ac]x_1 + [cb]x_2 + [cc]x_3 + [cd]x_4 = [cl]$$
$$[ad]x_1 + [bd]x_2 + [cd]x_3 + [dd]x_4 = [dl].$$

Die Verallgemeinerung der Resultate auf beliebig viele Unbekannte bietet keine Schwierigkeit dar.

Man hat aus der ersten Gleichung

$$x_1 = \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[ad]}{[aa]}x_4,$$

und indem man in die folgenden Gleichungen einsetzt und das neue Symbol einführt:

$$[ik] - \frac{[ai]}{[aa]}[ak] = [ik\cdot 1],$$

kommt man zu dem neuen, dem ersten durchaus analogen System:

$$[bb\cdot 1]x_2 + [bc\cdot 1]x_3 + [bd\cdot 1]x_4 = [bl\cdot 1]$$
$$[bc\cdot 1]x_2 + [cc\cdot 1]x_3 + [cd\cdot 1]x_4 = [cl\cdot 1]$$
$$[bd\cdot 1]x_2 + [cd\cdot 1]x_3 + [dd\cdot 1]x_4 = [dl\cdot 1].$$

Man hat wiederum aus der ersten Gleichung

$$x_2 = \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}x_3 - \frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}x_4.$$

Setzt man in die zweite und dritte Gleichung ein und schreibt

$$[ik\cdot 1] - \frac{[bi\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bk\cdot 1] = [ik\cdot 2],$$

so bekommt man

$$[cc\cdot 2]x_3 + [cd\cdot 2]x_4 = [cl\cdot 2]$$
$$[cd\cdot 2]x_3 + [dd\cdot 2]x_4 = [dl\cdot 2].$$

Man findet

$$x_3 = \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} - \frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}x_4$$

und für

$$[ik\cdot 2] - [ci\cdot 2]\frac{[ck\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} = [ik\cdot 3]$$

$$[dd\cdot 3]x_4 = [dl\cdot 3].$$

Man kommt also endlich zu dem *System der reduzierten Normalgleichungen*, das die Berechnung der Unbekannten durch sukzessive Substitution von der letzten zur ersten gestattet.

$$x_1 + \frac{[ab]}{[aa]}x_2 + \frac{[ac]}{[aa]}x_3 + \frac{[ad]}{[aa]}x_4 = \frac{[al]}{[aa]}$$
$$x_2 + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}x_3 + \frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}x_4 = \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$$
$$x_3 + \frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}x_4 = \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$$
$$x_4 = \frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}.$$

27. Es sei z. B.

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$	Gewicht 1
$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5$	„ 1
$4x_1 + x_2 + 4x_3 = 21$	„ 1
$-2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 28$	„ $\frac{1}{4}$.

Wir reduzieren alle Gleichungen auf dasselbe Gewicht, indem wir die letzte mit $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ multiplizieren; wir ersetzen sie also durch

$$-x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 14,$$

so daß die Fehlergleichungen sind

$$\varepsilon_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 3$$
$$\varepsilon_2 = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 5$$
$$\varepsilon_3 = 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 21$$
$$\varepsilon_4 = -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 14.$$

Es ist, wie man unmittelbar einsieht

$[aa] = 1 + 9 + 16 + 1 = 27,$ $[ab] = 6$ $[ac] = 0;$ $[al] = 88$
$[bb] = 15,$ $[bc] = 1;$ $[bl] = 70$
$[cc] = 54;$ $[cl] = 107$

$$[bb \cdot 1] = 15 - \frac{6}{27}\,6 = +\,13{,}667$$

$$[bc \cdot 1] = +\,1{,}000\,; \quad [cc \cdot 1] = +\,54{,}000$$

$$[bl \cdot 1] = +\,50{,}444\,; \quad [cl \cdot 1] = +\,107{,}000$$

$$[cc \cdot 2] = 54{,}000 - \frac{1{,}000}{13 \cdot 667} = 53{,}927$$

$$[cl \cdot 2] = 103{,}309\,.$$

Aus den reduzierten Normalgleichungen

$$x_1 + \frac{[ab]}{[aa]}x_2 + \frac{[ac]}{[aa]}x_3 = \frac{[al]}{[aa]}$$

$$x_2 + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}x_3 = \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$$

$$x_3 = \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]},$$

d. h. aus

$$x_1 + 0{,}222 \quad x_2 + 0{,}000 \quad x_3 = 3{,}259$$

$$x_2 + 0{,}073 \quad x_3 = 3{,}691$$

$$x_3 = 1{,}913\,,$$

erhält man die wahrscheinlichsten Werte

$$X_1 = 2{,}470\,, \quad X_2 = 3{,}553\,, \quad X_3 = 1{,}913$$

der Unbekannten x_1, x_2, x_3.[1])

§ 6. Angenäherte Bestimmung von $\frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}p^\alpha q^{s-\alpha}$, im Falle, wo s sehr groß ist.

28. Es bestehen hier die in Nr. 8 formulierten Hypothesen. Es ist dann sp sowohl gleich dem wahrscheinlichsten als gleich dem wahrscheinlichen Wert, $\sqrt{spq} = m$ der mittlere Fehler.

Wir setzen

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2spq}}$$

1) Vgl. für weitere Beispiele *Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, Leipzig 1907.

und beabsichtigen, zu zeigen, daß

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}\,e^{-\frac{x^2}{2spq}} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2m^2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}$$

und

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt$$

mit einer mit s wachsenden Annäherung die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrücken, daß in s Versuchen das Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, $ps + x$ mal eintritt, bzw. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zahl, welche das Vorkommen von E ausdrückt, dem Intervall $\left(sp - \frac{\gamma}{h},\, sp + \frac{\gamma}{h}\right)$ angehört.

Ein solcher Beweis wird die Beziehung zeigen, welche zwischen dem Gaußschen Fehlergesetz und der Theorie wiederholter Ereignisse besteht, und Formeln liefern, welche den Wert einzelner Glieder von $(p+q)^s$ und von Summen derselben rascher zu bestimmen gestatten als die ohne den Grenzübergang ausgeführte Schätzung.

29. Es gelte die *Stirling*sche Formel

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

als bewiesen, und es seien s, α, $s \cdot \alpha$ genügend groß,

$$\alpha = sp + \lambda\sqrt{s} \qquad (27)$$

$$\frac{\lambda\sqrt{s}}{sp} < 1$$

und λ endlich, so daß wir mit einem sehr kleinen Fehler

$$\frac{\alpha}{sp} = 1 + \frac{\lambda}{p\sqrt{s}}$$

gleich 1 annehmen können. Aus

$$p + q = 1$$

und aus Gleichung (27) erhalten wir

$$s - \alpha = sq - \lambda\sqrt{s},$$

so daß

$$u_\alpha = \frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}p^\alpha q^{s-\alpha}$$

folgende Form annimmt:

$$u_\alpha = \frac{s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}\, p^\alpha q^{s-\alpha}}{\alpha^\alpha \sqrt{2\pi\alpha}\, e^{-\alpha} e^{-s+\alpha}(s-\alpha)^{s-\alpha}\sqrt{2\pi(s-\alpha)}}$$

$$= \frac{s^s p^\alpha q^{s-\alpha}}{\alpha^\alpha (s-\alpha)^{s-\alpha}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)}}$$

$$= \left(\frac{sp}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{sq}{s-\alpha}\right)^{s-\alpha}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)}}.$$

Aus den gemachten Voraussetzungen folgt, daß mit dem Wachsen von s $\frac{\alpha}{sp}$ und $\frac{s-\alpha}{sq}$ gegen p bzw. gegen q konvergieren, sowie $\frac{s}{\alpha}$ und $\frac{s}{s-\alpha}$ gegen $\frac{1}{p}$ bzw. gegen $\frac{1}{q}$. Es ist aber

$$\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{s}{\alpha}\,\frac{1}{s}\,\frac{s}{s-\alpha},$$

also auch

$$\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi spq}}$$

und, falls wir mit $\log x$ den natürlichen Logarithmus von x bezeichnen,

$$\log u_\alpha = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} + \alpha\log\frac{sp}{\alpha} + (s-\alpha)\log\frac{sq}{s-\alpha}$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} - \alpha\log\frac{\alpha}{sp} - (s-\alpha)\log\frac{s-\alpha}{sq} \qquad (28)$$

und

$$\frac{\alpha}{sp} = 1 + \frac{\lambda}{p\sqrt{s}}$$

$$\frac{s-\alpha}{sq} = 1 - \frac{\lambda}{q\sqrt{s}}$$

einsetzen,

$$\log u_\alpha = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} - (sp+\lambda\sqrt{s})\log\left(1+\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right)$$

$$- (sq-\lambda\sqrt{s})\log\left(1-\frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right).$$

Setzen wir für $\log\left(1+\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right)$ und $\log\left(1-\frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right)$ die ersten

Glieder ihrer Reihenentwicklungen, so bekommen wir

$$(sp+\lambda\sqrt{s})\log\left(1+\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right) = (sp+\lambda\sqrt{s})$$
$$\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}} - \frac{\lambda^2}{2p^2 s} + \frac{\lambda^3}{3p^3 s\sqrt{s}} \cdots\right)$$

$$(sq-\lambda\sqrt{s})\log\left(1-\frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right) = (sq-\lambda\sqrt{s})$$
$$\left(\frac{\lambda}{q\sqrt{s}} - \frac{\lambda^2}{2q^2 s} - \frac{\lambda^3}{3q^3 s\sqrt{s}} \cdots\right)$$

und für $\lim s = \infty$

$$(sp+\lambda\sqrt{s})\log\left(1+\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right) = \lambda\sqrt{s} + \frac{\lambda^2}{2p}$$

$$(sq-\lambda\sqrt{s})\log\left(1-\frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right) = -\lambda\sqrt{s} + \frac{\lambda^2}{2q}$$

$$(sp+\lambda\sqrt{s})\log\left(1+\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}\right) + (sq-\lambda\sqrt{s})\log\left(1-\frac{\lambda}{q\sqrt{s}}\right)$$
$$= \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{\lambda^2}{2pq}.$$

Die Gleichung (28) wird infolgedessen zu

$$\log u_\alpha = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} - \frac{\lambda^2}{2pq},$$

woraus

$$u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}e^{-\frac{x^2}{2spq}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2h^2} \qquad (29)$$

folgt, falls

$$x = \lambda\sqrt{s}$$

ist. Gleichung (29) liefert für $x = \lambda\sqrt{s} = 0,\ \alpha = sp$

$$u_{sp} = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}}$$

als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Wertes von α. Mit wachsendem s konvergiert derselbe gegen Null.

29. Setzen wir wie vorhin

$$\alpha = sp + \lambda\sqrt{s},$$

so folgt aus (29), daß

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}d\lambda$$

die Wahrscheinlichkeit ist, daß $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$. Es sei $F(\varepsilon, s)$ die Wahrscheinlichkeit, daß

$$sp(1-\varepsilon) < \alpha < sp(1+\varepsilon).$$

Aus

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}d\lambda = 1$$

folgt die Möglichkeit, λ derart zu bestimmen, daß

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}d\lambda < \frac{\eta}{2}, \tag{30}$$

unter η eine beliebig kleine Größe verstanden. Es ist für

$$\lambda < \varepsilon p\sqrt{s}$$

$$F(\varepsilon, s) > F\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}, s\right),$$

und da

$$\lim_{s=\infty} F\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}, s\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}d\lambda,$$

so ist es möglich, s derart zu bestimmen, daß

$$\left|F\left(\frac{\lambda}{p\sqrt{s}}, s\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}d\lambda\right| < \frac{\eta}{2}. \tag{31}$$

Summiert man die Ungleichungen (30) und (31) Glied für Glied, so folgt:

$$1 - F(\varepsilon, s) < \eta.$$ [1]

Die Wahrscheinlichkeit, daß α im Intervall $(sp(1-\varepsilon),\ sp(1+\varepsilon))$ enthalten ist, konvergiert bei unbegrenztem Wachsen von s gegen die Einheit, wie klein auch ε sein mag.

1) Poincaré, Calc. des Probabilités, pag. 81—93.

Das Resultat ist uns schon auf anderem Wege bekannt geworden.

Anhang.

1. Wird in

$$J = \int_0^\infty t^r e^{-t^2} dt$$

t^2 durch x ersetzt, so hat man

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\frac{r-1}{r}} e^{-x} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right),$$

wo

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \qquad (n > 0)$$

das bekannte *Euler*sche Integral zweiter Gattung bezeichnet.

Man hat also für

$r = 1 \quad J = \frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}$

$r = 2 \quad J = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$

$r = 3 \quad J = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}$

$r = 4 \quad J = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$

. . . .

2. Es ist

$$\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^\gamma e^{-t^2}dt + \int_\gamma^\gamma e^{-t^2}dt.$$

Den Wert des Integrals

$$\psi(\gamma) = \int_0^\gamma e^{-t^2}dt$$

und somit von

$$\chi(\gamma) = \int_\gamma^\infty e^{-t^2}dt$$

bestimmt man entweder durch angenäherte Summation oder durch Reihenentwicklung.

Die Entwicklung von e^{-t^2} nach *Mac Laurin* und die gliedweise Integration zwischen 0 und γ liefert

$$\int_0^\gamma e^{-t^2} dt = \gamma - \frac{1}{1!}\frac{\gamma^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{\gamma^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{\gamma^7}{7} + \cdots. \tag{1}$$

Schon für Werte von γ, welche größer sind als 2, konvergiert die Reihe (1) zu langsam, um praktisch benutzt werden zu können.

Entwickelt man $\chi(\gamma)$ nach Taylor, so erhält man

$$\chi(\gamma) - \chi(\gamma + r) = r^{e^{-\gamma^2}}\left\{1 - \gamma r + r^2\frac{2\gamma^2 - 1}{3} - r^3\frac{2\gamma^3 - 3\gamma}{6} + \cdots\right\}$$

eine Relation, die von *Kramp* (*Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, Straßburg 1799) angewandt wurde. Die Krampsche Tafel enthält die Werte von $\chi(\gamma)$ für $r = 0,01$ und berücksichtigt nur die vier ersten Glieder der in Klammern geschriebenen Reihenentwicklung.

Gleichfalls hat man, wenn man die Substitutionen $\gamma t^2 = x + y^2$, $e^{-x} = y$ nacheinander ausführt

$$\chi(\gamma) = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} e^{-\gamma^2}\int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{\gamma^2 + x}} = \frac{1}{2} e^{-\gamma^2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\gamma^2 - \log y}},$$

woraus

$$\int_\gamma^\infty e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1\cdot 3}{(2\gamma^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(3\gamma^2)^3} + \cdots\right) \tag{2}$$

folgt.

Die Reihe (2) divergiert für $\gamma < 4$.

Wir verweisen für eine eingehendere Kenntnis des Gegenstandes und die Behandlung anderer Entwicklungen auf *Radau, Tables de l'intégrale* $\psi(z) = e^{z^2}\int_z^\infty e^{-t^2} dt$ (in Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, XVIII, 1885). Die Tafeln von Radau berücksichtigen die Werte von z, die zwischen 0 und 10 enthalten sind und um 0,01 voneinander abweichen.

3. Man beweist (vgl. z. B. *Serret, Calcul diff. et int., vol. II, n. 536*), daß

$$\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon)$$

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon = 0.$$

Die Relation

$$\log \Gamma(n+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi + n + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}\left[\left(n + r + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n+r}\right) - 1\right],$$

welche für alle Werte von n (den Wert Null und die ganzzahligen negativen Werte ausgeschlossen) zuerst von *Stirling* ausgesprochen wurde, kann auf ähnlichem Wege bewiesen werden.[1])

Man kann die Relation auch mittels der Eulerschen Summenformel gewinnen.[2]) Zu dem Ausdruck von $n!$, den wir benutzt haben (Seite 51), kann man in viel einfacherer Weise gelangen, indem man von den Ungleichungen ausgeht

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}.^{3)} \tag{3}$$

Es ist, falls

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

oder, wenn wir (3) berücksichtigen

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$$

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} < \cdots < a_{n+1} < a_n.$$

---

1) Vergleiche für die Literatur des Gegenstandes „*Bestimmte Integrale*" von *Brunel* in *Encykl. der math. Wissenschaften*, II A 3.

2) Vgl. z. B. *Selivanoff, Lehrbuch der Differenzenrechnung* (Leipzig, 1904, Seite 59 ff.) oder das gleichnamige und weitergehende Lehrbuch von *Markoff*.

3) *Cesaro, Corso di analisi algebrica*, Torino 1884, Seiten 270 und 480. (Deutsch von Kowalewsky, *Elementares Lehrbuch der alg. Analysis und der Infinitesimalrechnung*, Leipzig 1904.)

Es folgt daraus, daß die Zahlen $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ mit dem Wachsen von n zunehmen, aber kleiner bleiben als die Zahlen a_n, welche eine *abnehmende* Reihe bilden. Sowohl die ersten wie die zweiten Größen konvergieren also gegen endliche Grenzen, welche übereinstimmen müssen. Setzt man

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} a_n e^{-\frac{1}{12n}} = a,$$

so hat man für jeden Wert von n

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n; \quad a = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1)$$

und

$$n! = a \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

Es ist aber nach der bekannten Wallisschen Formel

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right)^2,$$

also auch

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}}$$

$$(0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1).$$

Man leitet daraus ab

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}\, a\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}} = \frac{a}{2}$$

$$a = \sqrt{2\pi}$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

w. z. b. w.

Kapitel II.

Die statistische Sterblichkeitstheorie.

§ 1. Die Axiome und die grundlegenden Funktionen.

1. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die statistische Sterblichkeitstheorie kann auf bestimmte Axiome gegründet werden, die wir in der Bohlmannschen Formulierung[1]) erwähnen:

1) Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I, D4b, Seite 860.

Axiom I. Es sei (x) ein im Alter x stehendes Individuum einer Gesamtheit; alsdann wird die Wahrscheinlichkeit, daß (x) das Alter $x + m$ erreicht, durch eine bestimmte Funktion von x und $x + m$, $p(x, x + m)$ gemessen, für alle positiven Werte x und m, die ein gewisses Grenzalter ω, das niemand überlebt, nicht überschreiten.

Axiom II. Es sei $p(x, x + m)$ die Wahrscheinlichkeit, daß (x) das Alter $x + m$, $p'(y, y + n)$ die, daß (y) das Alter $y + n$ erreicht. Dann sind diese beiden Wahrscheinlichkeiten für alle positiven Zahlen x, y, m, n voneinander unabhängig[1]), falls sie sich auf zwei verschiedene Individuen beziehen.

Ebenfalls nach Bohlmann geben wir die folgende Definition: Eine Gesamtheit Γ von Individuen besteht aus lauter gleichartigen Risiken, wenn für irgend zwei Individuen dieser Gesamtheit,

$$p(x, x + m) = p'(y, y + n)$$

ist, sobald $x = y$, $m = n$ ist.

Die statistische Forschung hat nun die plausibelsten Werte der hier definierten Überlebenswahrscheinlichkeiten zu ermitteln, sowie diejenigen anderer Größen, die mit ihnen analytisch verbunden sind. Ihr fällt ferner die Aufgabe zu, die Übereinstimmung der formulierten Axiome mit der Wirklichkeit zu untersuchen, und damit den Wert zu bestimmen, den eine aus ihnen abgeleitete Theorie für die Praxis haben kann.

2. Es folgt aus den Axiomen I und II:

Jede Gesamtheit Γ von gleichartigen Risiken besitzt eine fingierte Absterbeordnung, d. h. zu ihr gehört eine Funktion l_x der kontinuierlichen Veränderlichen x, genannt die *Zahl der Lebenden des Alters* x, mit folgenden Eigenschaften

1. l_x ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt,
2. l_x nimmt mit wachsendem x nicht zu,
3. l_x ist nie negativ,
4. es ist $p(x, x + m) = \frac{l_{x+m}}{l_x}$.[2])

In der Tat ist, falls $0 < n < m$

$$p(x, x + m) = p(x, x + n)\, p(x + n, x + m),$$

1) Vgl. Seite 11 n. 3.
2) Bohlmann, l. c.

woraus folgt

$$p(x+n,\ x+m) = \frac{p(x,\ x+m)}{p(x,\ x+n)}. \tag{1}$$

Die Funktion $kp(x, a)$ von x und a bezeichnen wir mit l_a und nennen sie die Zahl der Lebenden des Alters a.

Für $n = 0$ wird (1)

$$p(x,\ x+m) = \frac{l_{x+m}}{l_x}$$

$$l_{x+m} = l_x p(x,\ x+m).$$

Aus $p(x, x+m) \leqq 1$ folgt $l_{x+m} \leqq l_x$, sowie aus $p(x, x+m) \geqq 0$, daß l_x entweder nur positiv oder nur negativ sein kann. Es ist aber für ein gewisses Grenzalter ω $p(\omega, \omega+m) = 0$

$$l_{\omega+m} = 0.$$

Aus $l_\omega \geqq l_{\omega+m}$ folgt also $l_\omega \geqq 0$ und allgemein $l_x > 0$.

§ 2. Bestimmung der Überlebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten.

3. Es seien L Individuen gegeben, die genau x Jahre alt sind, und die Überlebenswahrscheinlichkeiten

$$p(x+x+m) = p$$

bekannt. Wir fragen nach der wahrscheinlichen Zahl der Überlebenden des Alters $x+m$.

Ist $\varphi(n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß n Individuen das Alter $x+n$ erreichen werden, so ist nach der bekannten (I, § 2, 10) Definition

$$\sum_{n=0}^{n=L} n\varphi(n)$$

die gesuchte Zahl. Es ist aber auch, wegen Axioms II

$$\varphi(n) = \binom{L}{n} p^n (1-p)^{L-n}$$

und

$$\sum_{n=0}^{n=L} n \binom{L}{n} p^n (1-p)^{L-n} = Lp$$

(vgl. I, § 2, 12, (7)): damit ist die gesuchte wahrscheinliche Zahl der Überlebenden bestimmt, und mit ihr die wahrscheinliche Zahl

$$L(1-p) = Lq$$

derjenigen, die im Altersintervall $(x, x+m)$ sterben.

$$q = q(x,\ x+m) = 1 - p(x,\ x+m) = 1 - p$$

drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daß (x) das Alter $x+m$ nicht erreicht.

Bezeichnen wir mit D die Zahl der zu L gehörigen Individuen, die das Alter $x+m$ nicht erreichen, so kommt die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz

$$\left|\frac{D}{L} - q\right|$$

kleiner sei, als eine beliebig kleine Größe, desto näher der Einheit (d. h. der absoluten Gewißheit), je größer L ist (Satz von Bernoulli).

Es ist

$$\lim_{L=\infty} \frac{D}{L} = q,$$

woraus man in erster Annäherung ableitet

$$q = \frac{D}{L} \tag{2}$$

$$p = 1 - q = \frac{L-D}{L}. \tag{3}$$

Damit sind also die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, daß (x) im Altersintervall $(x, x+m)$ stirbt, bzw. daß (x) das Alter $x+m$ erreicht, numerisch bestimmt.

§ 3. Die Sterblichkeitstafel.

4. Das Problem der Bestimmung der Größen p und q ist also darauf zurückgeführt, die Zahl derjenigen zu ermitteln, welche aus einer Gesamtheit L von x-altrigen das Alter $x+m$ erreichen.

Mit anderen Worten: bezeichnet $L(x+m)$ die Zahl der Lebenden des Alters $x+m$, die von $L(x)$ Individuen des Alters x übrig geblieben sind, so handelt es sich darum, die Reihenfolge der Werte $L(x+m)$ zu bestimmen ($0 \leqq m \leqq \omega - x$, falls ω das

obere Grenzalter ist). Wir können auch sagen, daß es sich um die Herstellung einer Sterblichkeitstafel handelt, falls wir unter Sterblichkeitstafel eine solche Reihenfolge verstehen.

Es kann angenommen werden:
daß die $L(x)$ Individuen, welche die verschiedenen Alter x erreichen, derselben Generation angehören. Unter Generation verstehen wir eine Gesamtheit $L(0)$ von gleichzeitig Geborenen;
daß sie zu verschiedenen Generationen gehören.

Im ersteren Falle bezweckt die statistische Erhebung die Bestimmung der Zahl $L(x)$ der Überlebenden des Alters x von $L(0)$ Geborenen. Man beschränkt sich normalerweise darauf, die Werte $L(x)$ zu bestimmen, welche ganzzahligen Werten der Variablen x entsprechen. Die Bestimmung kann dadurch erreicht werden, daß man durch sukzessive Volkszählungen die Zahl der die Alter $1, 2, \ldots$ Überlebenden ermittelt; oder durch Feststellung der Zahl $D(x)$ derjenigen, die im Altersintervall $(x, x+1)$ sterben. Es ist

$$D(x) = L(x) - L(x+1)$$
$$D(x+1) = L(x+1) - L(x+2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D(x+m-1) = L(x+m-1) - L(x+m)$$
$$D(x) + D(x+1) + \cdots + D(x+m-1) = L(x) - L(x+m)$$

und, da für $x + m > \omega$

$$L(x+m) = D(x+m) = D(x+m+1) = \cdots = 0$$
$$\sum_{m=0} D(x+m) = L(x).$$

Wir sehen hier von den großen Schwierigkeiten ab, welche einer genauen Bestimmung dieser Art entgegenstehen, und die besonders von den Aus- und Einwanderungen herrühren. Dagegen bemerken wir, daß, während die Kenntnis der wirklichen Absterbeordnung einer bestimmten Generation einen sehr großen theoretischen Wert für den Statistiker oder den Biologen haben kann, sie nur einen beschränkten Anwendungswert besitzt. Denn die Quotienten (2) und (3) würden in diesem Falle die Sterblichkeitsverhältnisse von Gruppen ausdrücken, die in der Zeit ziemlich entfernt liegen können, so daß man sie nicht ohne weiteres als Maß der jetzigen Sterblichkeit annehmen dürfte.

5. Im zweiten Falle hat man eine Sterblichkeitstafel, welche nur in formaler Hinsicht der oben definierten gleichkommt. Sie drückt die Absterbeordnung einer fingierten Generation aus, von welcher angenommen wird, daß ihr die Sterbenswahrscheinlichkeiten von gleichzeitig Lebenden zukommen. Die Aufgabe ihrer Herstellung reduziert sich auf die Bestimmung der den verschiedenen Altern entsprechenden Sterbenswahrscheinlichkeiten von Individuen, die gleichzeitig beobachtet werden; aus solchen Wahrscheinlichkeiten leitet man die Funktion l_x mit Hilfe der vorhin eingeführten Relation

$$l_x = l_0 p(0, x)$$

ab. Bemerkt man wiederum, daß für

$$0 < x' < x$$
$$p(0, x) = p(0, x')\, p(x', x),$$

und bezeichnet mit $[x]$ die größte ganze Zahl, die in x enthalten ist, so hat man

$$l_x = l_0 p([x], x) \prod_{x_1=1}^{x_1=[x]} p(x_1 - 1, x_1),$$

wo l_0 die willkürliche Zahl der Individuen des Alters 0 bedeutet.

Nur im Falle der absoluten Konstanz der Sterblichkeitsverhältnisse in der Zeit und der vollen Ausgleichung des Einflusses der Ein- und Auswanderungen stimmen die beiden Sterblichkeitstafeln, d. h. „die Sterblichkeitstafel einer bestimmten Generation" und „die Sterblichkeitstafel gleichzeitig Lebender" überein. Auf den Unterschied zwischen den beiden Tafeln wird nicht immer genügend geachtet, obwohl er tatsächlich vorhanden und von Bedeutung ist. Sehr oft hat man die Herstellung einer Tafel vom ersten oder vom zweiten Typus durch die simultane Anwendung von Methoden erreichen zu können geglaubt, die nur einem von beiden entsprechen.[1])

1) Vgl. *Zeuner, Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*, Leipzig, 1869, S. 53. 54. Von Zeuner stammen die Ausdrücke „Sterbetafel einer bestimmten Generation" und „Sterbetafel gleichzeitig Lebender" her, die wir im Texte einführten.

§ 4. Die formale Bevölkerungstheorie.

6. Wir fragen, wie man die Zahl $L(x)$ der Individuen bestimmen kann, die genau x Jahre alt sind (x ganzzahlig), und die Zahl $D(x)$ der Individuen, die von den $L(x)$ im Altersintervall $(x, x+1)$ sterben. Eine sehr triviale Bemerkung besagt, daß die Zahl $L(x)$ nicht direkt bestimmt werden kann: die Anzahl der in einem bestimmten Augenblick Geborenen ist Null oder Eins, wenn man auch sehr große Bevölkerungsgruppen betrachtet. Es ist also auch Null oder Eins die Anzahl derjenigen, die genau in demselben Augenblick x Jahre alt werden. Die volle Gleichheit des Alters derjenigen, welche die Gesamtheit $L(x)$ bilden, ist also eine Bedingung, welche nie erfüllt wird. Die statistische Erhebung kann nur die Zahl der Individuen liefern, deren Alter x in einem bestimmten Augenblick zwischen vorgeschriebenen Altersgrenzen enthalten ist, oder die Zahl derjenigen, die in einer gewissen Zeitstrecke sterben, und deren Todesalter ebenfalls zwischen vorgeschriebenen Grenzen enthalten ist. So ist es z. B. möglich, statistisch zu ermitteln, wie viele Individuen am 31. Dezember 1906 das Alter 30 erreicht und nicht überschritten haben ($30 \leq x < 31$); wie viele Individuen im Jahre 1906 verstorben sind, deren Alter x ebenfalls dem Intervall (30, 31) angehörte.

Die Formulierung und die Kritik der Methoden, die von solchen Daten zu der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten führen — oder, wie man auch sagen kann, die Untersuchung der formalen Beziehungen, die zwischen statistischen Massen bestehen, welche durch verschiedene Bestimmungsmomente charakterisiert sind, ist Gegenstand der „formalen Bevölkerungstheorie". Die Aufgabe dieser letzteren kann in ihrer vollen Allgemeinheit folgendermaßen formuliert werden: die Individuen einer Gesamtheit sind gewisser Zustandsänderungen fähig, die für das im Zeitpunkt y geborene Individuum beim Alter x und im Zeitpunkt $x + y = z$ eintreten. Es handelt sich darum, den Stand der Gesamtheit als solcher darzustellen, wie er durch das Eintreten (bzw. durch das Nichteintreten, oder durch das Eintreten bei verschiedenen Altern und in verschiedenen Zeitpunkten) der betrachteten Zustandsänderung bei den einzelnen Individuen der Gesamtheit definiert wird.[1])

1) Im Grunde genommen ist dies die Aufgabe jeder Untersuchung, die sich auf die statistische Bevölkerungstheorie bezieht, jedenfalls wenn

Der Betrachtung einer einzigen Zustandsänderung entspricht die einfachste Gestalt der formalen Theorie. Wir können dagegen ebensoviele Variablen $z_1, z_2 \ldots$ in Betracht ziehen, als es mögliche Zustandsänderungen gibt. Es treten dann neue Beziehungen zwischen den Werten z ein, sowie zwischen den Werten x und y, und z und x, welche die Länge der Zeit ausdrücken, die zwischen einer Zustandsänderung und den übrigen verlebt wird, und das Alter, bei dem jede Zustandsänderung eintritt.

7. Ansätze zur formalen Bevölkerungstheorie finden wir schon bei den älteren Schriftstellern, die sich mit der Frage der Herstellung von Sterblichkeitstafeln beschäftigt haben, wie bei Finlaison, bei Woulhouse, bei Moser, Fourier, Fischer. Systematisch ist sie von Knapp, Becker, Zeuner, Lexis behandelt worden.[1])

Knapp (in einem ersten Werke[2])) und Zeuner[3]) gehen von der Annahme der Stetigkeit der Funktionen aus, die den Gegenstand der Untersuchung bilden; nur tritt bei Zeuner die Annahme der Konstanz der Sterblichkeitsverhältnisse nicht hervor, wie in der weniger einfachen Darstellung seines Vorgängers. Die wirkliche Diskontinuität der vorkommenden Funktionen berücksichtigt Knapp in einem zweiten Werke[4]), wo er sich eines besonderen Algorithmus bedient, den er kontinuierliche Summation nennt, und der auf unstetige Funktionen stetiger Variabler Anwendung findet.

Eine größere Einfachheit und Allgemeinheit erreicht W. Lexis[5]), der völlig von analytischen Betrachtungen absieht, und im Einklang mit Knapp (*die Theorie* usw.) seine Darstellungen auf die Ebene beschränkt, während Zeuner vom dreidimensionalen Raume Gebrauch gemacht hatte (*Abhandlungen* usw.)

man mit Lexis als Gegenstand dieser letzteren ansieht: *„die Grundzüge aufzustellen, nach denen diese Massenerscheinungen, die Gesamtergebnisse von zahlreichen gewissermaßen molekularen Einzelprozessen, zu beobachten und wissenschaftlich zu bewältigen sind.* Vgl. *Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik,* Straßburg 1875, Seite 2.

1) Vgl. *von Bortkievicz: Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik,* in Encykl. d. math. Wiss. Bd. 1, D4a, Seite 840. Vgl. ebenfalls *Perozzo: Della rappresentazione grafica di individui nella successione del tempo e in particolare dei diagrammi a tre coordinate*, in Annali di Statistica, Serie II, vol. XII.

2) *Sterblichkeit in Sachsen,* Leipzig 1869.

3) *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*, Leipzig 1869.

4) *Theorie des Bevölkerungswechsels,* Braunschweig 1874.

5) *Einleitung in die Theorie* usw.

§ 5. Anwendung der formalen Bevölkerungstheorie auf die Sterblichkeit.

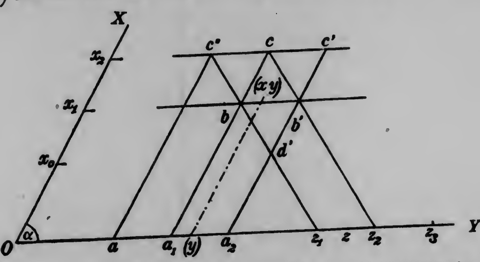
I. Die geometrische Formulierung.

8. Es seien x, y, z bzw. das Alter, die Geburtszeit eines bestimmten Individuums und die Zeit, wo es als x-jährig beobachtet wird. Es ist

$$x + y = z.$$

Indem wir das Jahr als Zeiteinheit und O als Anfangszeit wählen, können wir den Wertepaaren (x, y) die Punkte einer Ebene entsprechen lassen, wobei wir uns auf die Koordinatenachsen OY (die Zeitachse) und OX (die Altersachse) beziehen.

Stirbt (x) im Alter x und zur Zeit y, so nennen wir die gradlinige Strecke, deren Endpunkte $(0, y)$ und (x, y) sind, und deren Länge proportional zu x ist, die *Lebenslinie* des betrachteten Individuums. Lassen wir nun jedem der in einer bestimmten Periode (a_1, a_2) Geborenen (wir werden $a_2 = a_1 + 1$ annehmen) eine Lebenslinie entsprechen, so liefert das Verhältnis der Anzahl der Punkte (x, y) die im Parallelogramm $bcc'b'$ enthalten sind (d. h. der Todesfälle, für welche $a_1 \leqq y < a_2$, und $x_1 \leqq x < x_2$ ist; vgl. die Figur) zu der Anzahl der Schnittpunkte der genannten Lebens-



linien mit der Geraden $x = x_1$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum der betrachteten Generation (a_1, a_2) im Altersintervall (x_1, x_2) stirbt. (Es ist dabei $x_2 = x_1 + 1$.)

Die Anzahl solcher Punkte ist es, die man statistisch festzustellen hätte.

9. Wir nennen die Anzahl der Punkte (x, y) die in $bcc'b'$ enthalten sind, *die erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen* und bezeichnen sie mit $M_1(x_1, a_1)$ — die Anzahl der Schnittpunkte der

Lebenslinien $(x, a_1 \leqq y < a_2)$ mit der Geraden $x = x_1$ *die erste Hauptgesamtheit von Lebenden* $V_1(x_1, a_1)$. Es ist offenbar

$$M_1(x_1, a_1) = V_1(x_1, a_1) - V_1(x_2, a_1).$$

Wie schon bemerkt, läßt sich die erste Hauptgesamtheit von Lebenden statistisch nicht feststellen; wirklich angeben können wir dagegen die *zweite Hauptgesamtheit* $V_2(a_1, z_1)$ *von Lebenden*, welche die Anzahl der Personen ist, die im Zeitpunkt z_1 noch leben und im Zeitintervall (a_1, a_2) geboren sind. Diese ist mit der Anzahl der Schnittpunkte der Lebenslinien der Generation (a_1, a_2) mit der durch die zwei Punkte b und d' definierten geradlinigen Strecke identisch. Der Punktinhalt des Parallelogramms $cbd'b'$ drückt die Anzahl derjenigen aus, die im Zeitintervall (a_1, a_2) geboren und im Zeitintervall (z_1, z_2) verstorben sind, mit anderen Worten, die Anzahl der Individuen, die aus der Generation (a_1, a_2) stammen und im Altersintervall $(z_1 - a_1 - 1, z_1 - a_1 + 1)$ verstorben sind. Wir nennen diese Gesamtheit die *zweite Hauptgesamtheit von Verstorbenen*, und bezeichnen sie mit $M_2(a_1, z_1)$. Es ist, genau wie vorhin,

$$M_2(a_1, z_1) = V_2(a_1, z_1) - V_2(a_1, z_2).$$

Die Anzahl der Individuen, die im Altersintervall (x_1, x_2) und im Zeitintervall (z_1, z_2) verstorben sind — d. h. den Punktinhalt des Parallelogramms $bb'cc''$ — nennen wir die *dritte Hauptgesamtheit* $M_3(x_1, z_1)$ *von Verstorbenen*. Es folgt unmittelbar aus der Figur, wenn man anstatt der Flächen ihren Punktinhalt berücksichtigt:

$$M_3(x_1, z_1) = V_2(a_0, z_1) - V_1(x_2, a_0) + V_1(x_1, a_1) - V_2(a_1, z_2).$$

Endlich nennen wir *erste* und *zweite Elementargesamtheit von Verstorbenen* den Punktinhalt der Dreiecke $cc'b'$, cbb' (die gleichseitig sind, falls der Winkel α, den die positiven Richtungen der zwei Achsen OY und OX miteinander bilden, gleich $\frac{\pi}{3}$ ist). Diese zwei Gesamtheiten drücken bzw. die Anzahl der Individuen aus, die im Zeitintervall (a_1, a_2) geboren, im Altersintervall (x_1, x_2) und im Zeitintervall (z_2, z_3) sterben, bzw. der Individuen, die im Zeitintervall (a_1, a_2) geboren sind, im Altersintervall (x_1, x_2) und im Zeitintervall (z_1, z_2) sterben. Die Elementargesamtheiten sind dadurch charakterisiert, daß sie für jedes der drei Bestimmungselemente x, y, z (Geburtszeit, Alter beim Tode, Todeszeit) nur

einen einjährigen Spielraum haben, während bei den Hauptgesamtheiten nur zwei von den drei Bestimmungselementen bis auf ein Jahr definiert waren, das dritte dagegen einen zweijährigen Spielraum hatte, was man unmittelbar aus den gegebenen Definitionen und aus der Figur einsieht.

10. Es ist nach § 2

$$q = \frac{M_1(x_1, a_1)}{V_1(x_1, a_1)}, \quad p = \frac{V_1(x_2, a_1)}{V_1(x_1, a_1)}. \tag{4}$$

Wir fragen nach den Ausdrücken, durch welche die Gleichungen (4) ersetzt werden können, falls die statistische Erhebung die Kenntnis von Gesamtheiten liefert, die nicht vom ersten Typus sind, und falls die Sterbetafel, die man haben will, eine Sterbetafel gleichzeitig Lebender ist.

Keiner weiteren Ausdrücke bedürfen wir, falls die in einem bestimmten Jahre stattfindenden Sterbefälle nach Geburtsjahren und nach einjährigen Altersstufen unterschieden werden; es lassen sich dann die ersten Hauptgesamtheiten unmittelbar angeben. Es ist, falls wir den Punktinhalt der Dreiecke $cc'b'$, cbb' bzw. mit $E_1(x_1, a_1, z_1)$ und $E_2(x_1, a_1, z_1)$ bezeichnen

$$E_1(x_1, a_1, z_1) + E_2(x_1, a_1, z_1) = M_1(x_1, a_1)$$

$$V_2(a_1, z_2) + E_2(x_1, a_1, z_1) = V_1(x_1, a_1),$$

wo die Anzahl $V_2(a_1, z_2)$ der Individuen, die aus der Generation (a_1, a_2) stammen und zur Zeit z_2 noch leben, durch die Volkszählungen ermittelt wird. Das vollständige Schema wäre also:

Es sind im Jahre 1905 verstorben

X_1 Individuen, die im Jahre 1874 geboren sind und das Alter 30 erreicht und nicht überschritten haben;

X_2 Individuen, die im Jahre 1875 geboren sind und das Alter 30 erreicht und nicht überschritten haben.

Es sind im Jahre 1906 verstorben:

X_3 Individuen, die im Jahre 1875 geboren sind und das Alter 30 erreicht und nicht überschritten hatten

. . . .

Es lebten am 31. Dezember 1905

Y_1 Individuen, die im Jahre 1874 geboren sind,

Y_2 Individuen, die im Jahre 1875 geboren sind.

. . . .

Es wäre dann

$$\frac{X_2 + X_3}{Y_2 + X_2} = q(30)$$

die Sterbenswahrscheinlichkeit,

$$\frac{Y_2 - X_3}{Y_2 + X_2} = p(30)$$

die Überlebenswahrscheinlichkeit eines 30-jährigen.

Gewöhnlich sind aber die Elementargesamtheiten nicht bekannt und man muß sich mit der Unterscheidung der Sterbefälle nach einjährigen Altersstufen begnügen, ohne das Geburtsjahr zu berücksichtigen. Es sind mit anderen Worten nur bekannt: die dritten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen einerseits, und die zweiten Hauptgesamtheiten von Lebenden andererseits; woraus die Notwendigkeit von Hypothesen folgt, welche eine angenäherte Bestimmung der Elementargesamtheiten aus diesen Daten gestatten.

11. Nimmt man an, daß die Anzahl der Geburten eines Jahres mit der Anzahl der Geburten in dem unmittelbar vorangehenden und in dem unmittelbar folgenden Jahre übereinstimmt, sowie, daß die Absterbeordnung innerhalb enger Grenzen konstant bleibt, so kann man auch die Gleichheit der Elementargesamtheiten annehmen, die sich auf dieselbe Alterstufe und auf benachbarte Perioden beziehen.

Aus

$$E_1 = (x_1, a_0, z_1) = E_2(x_1, a_1, z_1) = E_1(x_1, a_1, z_1)$$

leitet man ab

$$E_2(x_1, a_1, z_1) = \tfrac{1}{2} M_3(x_1, z_1)$$

und

$$q = \frac{M_3(x_1, z_1)}{V_2(a_1, z_1) + \frac{1}{2} M_3(x_1, z_1)}. \tag{5}$$

Die Gleichung (5) liefert einen genügend angenäherten Ausdruck von q, und infolgedessen von p, falls extreme Altersstufen nicht in Betracht kommen. Nach der Definition von $V_2(a, z)$ und von $M_3(x, z)$ kommt man mit der Kenntnis folgender Daten aus:

Es lebten am . . . . ., ... Individuen, die sich im Altersintervall $(x, x+1)$ befanden.

Es sind im Jahre . . . ., ... Individuen verstorben, die sich im Altersintervall $(x, x+1)$ befanden.

In analoger Weise wird die Lösung des Problems der Herstellung einer Sterblichkeitstafel aus einem gegebenen statistischen Material auf die Beziehungen gegründet, welche zwischen den Gesamtheiten der verschiedenen Typen bestehen. Eine solche Herstellung läßt sich streng oder nur angenähert durchführen, je nachdem es möglich ist, oder nicht, die faktisch beobachteten Gesamtheiten auf Gesamtheiten der ersten Art ohne die Heranziehung von Hypothesen zurückzuführen, welche die Äquivalenz des Punktinhalts sich nicht deckender Flächen behaupten.

§ 6. **Fortsetzung.**

II. Die analytische Formulierung. Der Knappsche Algorithmus.

12. Es bezeichne $L(x)$ die Anzahl der Individuen, die zu einer bestimmten Generation (a_1, a_2) gehören, und im Alter x leben. Die Differenz

$$L(x) - L(x+h)$$

bezeichnet dann die Anzahl der im Altersintervall $(x, x+h)$ Verstorbenen, natürlich unter der Annahme, daß die Gruppe der $L(x)$ weder durch Einwanderungen vermehrt, noch durch Auswanderungen vermindert wird. Wir werden eine Gruppe von solcher Beschaffenheit *geschlossen* nennen. Ist h sehr klein, so wird $L(x) - L(x+h)$ gleich einer kleinen ganzen Zahl sein, oder gleich Null, je nachdem im Intervall Individuen der Gruppe verstorben sind oder nicht; ist h unendlich klein, so wird auch die betrachtete Differenz nur der Werte Null und Eins fähig sein.

Die Funktion $L(x)$ nimmt also unstetig von dem positiven Werte $L(x)$ zu Null ab, und hat endlich viele endliche Sprünge, deren jeder sie von einem Werte $L(x_1)$ zum Werte $L(x_1) - 1$ überführt $(x_1 \geqq x)$.

Es folgt aus ihrer Definition, daß sie integrierbar ist; integrierbar ist bekanntlich jede endliche Funktion, deren Unstetigkeitspunkte endlich und in endlicher Anzahl vorhanden sind.

$$\int_x^\infty L(x)\,dx$$

drückt offenbar die von der ganzen Gruppe und vom Alter x ab verlebte Zeit aus.

13. Aus derselben Definition folgt, daß die Funktion $L(x)$ keine Ableitung in $L(x)$ Punkten des Intervalls (x, ∞) hat, und die Ableitung 0 in allen übrigen Punkten.

Anstatt

$$\lim_{h=0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h}$$

betrachten wir demgemäß die Differenz

$$\lim_{h=0} [L(x) - L(x+h)] = dL(x) \tag{6}$$

und setzen

$$dL(x) = \lambda(x).$$

$\lambda(x)$ ist überall Null bis auf $L(x)$ Punkte, wo es gleich 1 ist. Es ist also für beliebige Werte x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)\,dx = 0.$$

Der Beweis läßt sich ganz einfach führen, indem man das Intervall (x_1, x_2) in gleiche Teilintervalle teilt, und diese zu zwei Klassen vereinigt: die Klasse der Intervalle, welche die Werte $\lambda(x) = 1$ enthalten, und die Klasse der Intervalle, für welche $\lambda(x)$ identisch null ist.

Offenbar liefert die auf die zweite Klasse erstreckte Summation Null, während die auf die erste Klasse erstreckte Summation die Summe der in ihr enthaltenen Intervalle ergibt. Da aber diese Intervalle beliebig klein gemacht werden können, so liefert die auf sie erstreckte Summation an der Grenze ebenfalls Null.

Betrachten wir also anstatt des Integrals

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)\,dx$$

die kontinuierliche Summation

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{x_1}^{x_2} \lambda(x)$$

der Werte von $\lambda(x)$ im Intervall (x_1, x_2), d. h. die Summe der Werte von $\lambda(x)$, welche den Werten $x_1 \leqq x \leqq x_2$ der Variablen x

(der Zeit) entsprechen. Es ist offenbar

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x}^{\infty}\lambda(x) = L(x) \tag{7}$$

die inverse Operation zu der durch (6) definierten, sowie

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x_1}^{x_2}\lambda(x) = L(x_1) - L(x_2) \tag{8}$$

oder, falls wir in (8) $x_1 > x_2$ annehmen,

$$-\mathop{\mathrm{S}}_{x_2}^{x_1} = \mathop{\mathrm{S}}_{x_1}^{x_2}$$

und

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x_1}^{x_2} + \mathop{\mathrm{S}}_{x_2}^{x_3} = \mathop{\mathrm{S}}_{x_1}^{x_3}.$$

14. Wir setzen $L(x) = L(x, y)$, um die Generation der im Intervall (a, y) Geborenen zu bezeichnen, und fassen y, ebenso wie x, als Variable auf. Es gelten für den Limes

$$\lim_{h=0}\,[L(x, y+h) - L(x, y)] = \mu(x, y)$$

genau dieselben Betrachtungen, die wir für $\lambda(x)$ aufstellten; sie gelten auch für

$$-\lim_{h'=0}\,[\mu(x+h', y) - \mu(x, y)] = \lambda(x, y)$$

d. h. für die Zahl derjenigen Individuen, die im Zeitintervall $(x, y + dx)$ geboren wurden und im Altersintervall $(x, x + h')$ verstorben sind.

Die früher eingeführten Gesamtheiten von Lebenden und Verstorbenen werden demgemäß durch Summation der $\lambda(x, y)$ bezüglich der beiden Variablen x und y definiert.

Es drückt

$$\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2}\mu(x, y)$$

— das wir auch, wegen (7)

$$\mu(x, y) = \mathop{\mathrm{S}}_{x=\lambda}^{x=\infty}\lambda(x, y)$$

in der Form schreiben können

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=x_1}^{x=\infty}\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2}\lambda(x, y)$$

die Anzahl der Individuen aus, die zur Generation (a_1, a_2) gehören und das Alter x_1 erreicht haben. Es ist dies diejenige Gesamtheit, die wir die erste Gesamtheit $V_1(x_1, a_1)$ von Lebenden nannten. Es ist offenbar auch

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=x_1}^{x=x_2}\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2}\lambda(x, y) = M_1(z_1, y)$$

oder, falls wir $x = z - y$ setzen,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2}\mathop{\mathrm{S}}_{z=z_1}^{z=\infty}\lambda(z - y, y) = V_2(a_1, z_1)$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2}\mathop{\mathrm{S}}_{z=z_1}^{z=z_2}\lambda(z - y, y) = M_2(a_1, z_1)$$

und analog für $y = z - x$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=x_1}^{x=x_2}\mathop{\mathrm{S}}_{z=z_1}^{z=z_2}\lambda(x, z - x) = M_1(x_1, z_1).$$

Den analytischen Ausdruck der Elementargesamtheiten erreichen wir einfach dadurch, daß wir die Grenzen unserer Doppelsummen so definieren, daß

$$a_1 < y < a_2, \quad x_1 < x < x_2, \quad z_2 < z < z_3$$

bzw. daß

$$a_1 < y < a_2, \quad x_1 < x < x_2, \quad z_1 < z < z_2.$$

Es ist

$$\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2}\mathop{\mathrm{S}}_{x=z_2-y}^{x=x_2}\lambda(x, y) = E_1(x_1, a_1, z_1)$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{y=a_1}^{y=a_2}\mathop{\mathrm{S}}_{x=x_1}^{x=z_2-y}\lambda(x, y) = E_2(x_1, a_1, z_1),$$

woraus die bekannte Relation

$$E_1(x_1, a_1, z_1) + E_2(x_1, a_1, z_1) = M_1(x_1, a_1)$$

folgt.

15. Die Hypothese, von der man gewöhnlich ausgeht, ist die, daß die Funktion $L(x, y)$ stetig und differentiierbar nach den Variablen x und y ist, und daß infolgedessen Funktionen $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ existieren, welche die Anzahl der Individuen angeben, die zur Generation $(y, y + dy)$ gehören und das Alter x erreichen, bzw. im Altersintervall $(x, x + dx)$ sterben.[1])

Es sind also $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ durch die Gleichungen definiert:

$$L(x, y + dy) - L(x, y) = f(x, y)\,dy$$

$$-[f(x + dx, y) - f(x, y)] = \varphi(x, y)\,dx\,dy\,.$$

Die Gleichung

$$f(x, y) = u$$

auf ein System Cartesischer Koordinaten bezogen, charakterisiert im dreidimensionalen Raume eine Fläche, deren Bestimmung Zeuner als den entfernten und im streng mathematischen Sinne nicht erreichbaren Zweck jeder statistischen Untersuchung und jeder analytischen Interpretation derselben betrachtet.[2])

Jedem Wertepaare (x, y) der Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

entspricht ein Punkt der Ebene XOY, die wir bis jetzt betrachtet haben; der analytische Ausdruck der verschiedenen Gesamtheiten wird also im Falle, wo eine mittlere Dichtigkeit oder Häufigkeit der Geburten und der Sterbefälle im Innern jeder Gesamtheit angenommen wird, durch die Ersetzung der vorher betrachteten Summation durch Integrale geliefert, die man längs der geradlinigen Strecken und der Begrenzungen der Flächen nimmt, welche in der OXY Ebene die verschiedenen Gesamtheiten definieren.[3])

1) Eine solche Hypothese findet ihre Berechtigung in dem offenbaren Parallelismus, welcher zwischen der Infinitesimalrechnung und den hier eingeführten Operationen d und S besteht. Daraus folgt, daß wir letzteren vermeiden können. Vgl. *Bohlmann, über Versicherungsmathematik* in *Klein* und *Riecke: Über angewandte Mathematik und Physik*, Leipzig, Seite 136.

2) *Zeuner, Abhandlungen,* Seite 11.

3) Es sei $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ (die Differentiierbarkeit der Funktionen φ und ψ wird vorausgesetzt), und C die Kurve, welche der Punkt $f(x, y)$ beschreibt, wenn t im Intervall (t_0, t_1) variiert. Das längs C genommene Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

wird, falls $y = t$

$$\int_{y_0}^{y_1} f(y,\ \psi(y))\,dy\,.$$

So z. B. wird die erste Gesamtheit von Verstorbenen durch die Integration längs $bb'c'cb = C$ geliefert, wobei die Integrationsrichtung diejenige ist, die die Reihenfolge der Buchstaben definiert. Es ist, kraft (6) und (8)

$$M_1(x_1, y) = -\int_{a_1}^{a_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dx = -\int_{a_1}^{a_2} dy\,[f(x_2, y) - f(x_1, y)]$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} f(x_1, y)\,dy + \int_{a_2}^{a_1} f(x_2, y)\,dy = \int_C f(x, y)\,dy\,.$$

Entsprechend wird man die übrigen Gesamtheiten von Verstorbenen und von Lebenden definieren. Vgl. *Czuber, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung* usw. S. 356, 357.

§ 7. **Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit bei offenen Gesamtheiten.**

16. Das Problem der Bestimmung von Sterbenswahrscheinlichkeiten bei offenen Gesamtheiten — d. h. bei Gruppen von Individuen, welche Änderungen durch Ein- und Auswanderungen unterworfen sind — kann als ein spezieller Fall des Problems betrachtet werden, die Sterbenswahrscheinlichkeiten bei Gruppen zu bestimmen, welche während der Beobachtung infolge anderer Ursachen, als des Absterbens, sich ändern, sei es durch das Hinzukommen von Individuen, welche anfänglich nicht zur Gruppe gehörten, sei es durch das Ausscheiden von ursprünglich Beobachteten.

Der Wanderungsbegriff, wie wir ihn hier formulieren, ist nicht mit der normalen Bedeutung des Wortes identisch. Unter Wanderung verstehen wir den Übergang eines Individuums von einer bestimmten demographischen Klasse zu einer anderen, zum Beispiel, den Übergang eines Individuums von der Kategorie der

Ledigen zu der Kategorie der Verheirateten, falls wir die zu den beiden Gruppen gehörigen Sterbenswahrscheinlichkeiten getrennt voneinander bestimmen wollen.

Das Problem, mit dem wir uns nun beschäftigen wollen, ist also das folgende. Es sind beobachtet worden:

L Individuen, welche x Jahre alt sind;

D Individuen, welche im Altersintervall $(x, x+1)$ verstorben sind;

I Individuen, die im Altersintervall $(x, x+1)$ und während des Beobachtungsjahres hinzugekommen sind;

E Individuen, welche innerhalb derselben Zeit- und Altersgrenzen aus der beobachteten Gruppe ausgetreten sind.

Es handelt sich darum, die Wahrscheinlichkeit

$$q(x, x+1) = q$$

zu bestimmen, daß ein x-jähriges Individuum das Alter $x+1$ nicht erreicht, unter der Annahme, daß die Individuen der Gruppen L und E gleichartige Risiken sind, und daß das Austreten aus der Gruppe keinen Einfluß auf die Sterblichkeit übt.

17. Der Ausdruck von q, den man gewöhnlich benutzt, ist

$$q = \frac{D}{L + \frac{I-E}{2}}.$$

Seine Ableitung gründet sich auf den Annahmen:

I. daß sich die Ein- und Auswanderungen gleichmäßig auf das ganze Jahr verteilen;

II. daß die Funktion $l(x)$ von x, welche die Anzahl der Überlebenden des Alters x liefert, stetig und im Intervall $(x, x+1)$ linear ist. Es ist also, falls

$$h = \frac{1}{n}, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

$$q(x + rh,\; x + h(r+1)) = \frac{1}{n} q(x, x+1);$$

III. daß die Wahrscheinlichkeit $q(x+k, x+h)$, im Altersintervall $(x+k, x+h)$

$$(0 < k < h < 1)$$

zu sterben, nur von h und k abhängt. Es ist also gleichgültig, ob das betrachtete Individuum während der Periode $(h-k)$ zur

Gesamtheit gehört oder nicht. Danach ist Idh die Anzahl der Individuen, die im Altersintervall $(x+h, x+h+dh)$ hinzugekommen sind. Dieser Anzahl entspricht eine Anzahl

$$I \frac{l(x)}{l(x+h)} dh$$

von Individuen, die man beim Alter x beobachtet hätte, falls die Hinzugekommenen schon im Alter x unter Beobachtung gewesen wären. Es ist daher

$$Idh \left\{ \frac{lx}{l(x+h)} - 1 \right\}$$

die Anzahl der Sterbefälle, die im Altersintervall $(x, x+h)$ stattgefunden haben und infolgedessen nicht beobachtet worden sind. Analog werden

$$Edh; \quad E\frac{l(x+1)}{l(x+h)} dh; \quad Edh \left\{ 1 - \frac{l(x+1)}{l(x+h)} \right\}$$

bzw. die Anzahl der Individuen ausdrücken, die im Altersintervall $(x+h, x+h+dh)$ aus der beobachteten Gesamtheit ausgetreten sind, die Anzahl der Überlebenden des Alters $x+1$ von Edh $x+h$-jährigen, die Anzahl der Sterbefälle, welche durch das Austreten der Edh Individuen aus der Gruppe der Beobachtung entzogen werden.

Lassen wir die Variable h die unendlich vielen Werte des Intervalls $(0, 1)$ durchlaufen, so bekommen wir als Ausdruck der Gesamtzahl der Individuen, die im Alter x leben:

$$L + Il(x) \int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)}$$

und als Ausdruck der Gesamtzahl der Sterbefälle im Altersintervall $(x, x+1)$:

$$D + I \left\{ l(x) \int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)} - 1 \right\} + E \left\{ 1 - l(x+1) \int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)} \right\},$$

so daß

$$q = \frac{D + I\{l(x)k - 1\} - E\{l(x+1)k - 1\}}{L + Ikl(x)}$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist, falls wir der Kürze halber

$$k = \int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)}$$

setzen. Es folgt aber aus der Annahme II

$$q(x+h,\ x+1) = (1-h)\,q(x,\ x+1) = (1-h)\,q,$$

so daß man hat:

$$kl(x+1) = l(x+1)\int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)} = \int_0^1 [1-(1-h)q]\,dh = 1 - \frac{1}{2}q$$

und, da wegen

$$\begin{aligned} qL &= D + Ikl(x)(1-q) + E - I - Ekl(x+1) \\ &= D - (I-E)\{1 - kl(x+1)\} \\ D &= qL + (I-E)(1 - 1 + \tfrac{1}{2}q), \end{aligned}$$

$$q = \frac{D}{L + \frac{1}{2}(I-E)}, \tag{9}$$

wie wir behauptet hatten.

18. Es wäre leicht zu beweisen, daß man zu derselben Form auch dann gelangt, falls man, anstatt die Sterbenswahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres als eine lineare Funktion der Zeit anzusehen, annimmt, daß

$$l(x+h) = l(x) - h[l(x) - l(x+1)]$$

d. h. falls man die gleichmäßige Verteilung der Sterbefälle auf das ganze Jahr postuliert und bezüglich der Häufigkeit der Ein- und Auswanderungen im Altersintervall $(x, x+1)$ die Zeunersche Hypothese macht, nach welcher eine solche relative Häufigkeit proportional der Anzahl der Überlebenden in dem Alter ist, in welchem die Ein- und Auswanderungen stattfindend gedacht werden.[1] Man hat aus (9), indem man setzt:

$$\begin{aligned} L' &= L + I - E - D \\ I - E &= L' - L + D \\ L + \tfrac{1}{2}(I-E) &= \tfrac{1}{2}\{L + L' + D\}, \end{aligned}$$

$$q = \frac{2D}{L + L' + D}, \tag{10}$$

1) *Czuber,* l. c. Seite 379, *Zeuner,* l. c. Seite 116.

so daß man die Sterbenswahrscheinlichkeit einfach als Funktion der Anzahl der Todesfälle und der Zahl der Individuen definiert, die am Anfang bzw. am Ende des Beobachtungsjahres zur betrachteten Gesamtheit gehörten. Das Resultat und die Indifferenz der Hypothesen über die Verteilung der Ein- und Auswanderungen innerhalb des Jahres hätten wir auf anderem Wege beweisen können; statistisch interpretiert besagt die Gleichung (10), daß die Kenntnis der ersten Gesamtheiten Lebender und der Elementargesamtheiten Verstorbener völlig ausreicht, um zur Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit bei offenen Gruppen zu gelangen, daß man also eine Unterscheidung der Sterbefälle nach der Zugehörigkeit der verstorbenen Individuen zur Gruppe am Anfang des Beobachtungsjahres nicht in Betracht zu ziehen braucht.[1]

§ 8. **Einführung neuer biometrischer Funktionen.**

19. Eine beliebige unter den Funktionen l_x, $l_x - l_{x+1} = d_x$, $q_x = q(x, x+1)$, $p_x = 1 - q_x$, die wir bis jetzt betrachtet haben, genügt, um die Absterbeordnung einer Gesamtheit gleichartiger Individuen zu charakterisieren, jedenfalls wenn man sich auf ganzzahlige Altersstufen beschränkt. Neben diesen Funktionen führt man zuweilen andere ein — die mit den ersten unter der Bezeichnung „biometrische Funktionen" zusammengefaßt werden —, und welche für manche Zwecke der analytischen Betrachtung oder der statistischen Darstellung als passender erscheinen können. Als Überlebens- oder Sterbetafel kann man eine Tafel solcher Funktionen oder einiger unter ihnen definieren; die Möglichkeit von einer gegebenen Funktion zu allen übrigen überzugehen, macht es völlig gleichgültig, welche Funktionen man in einer solchen Tafel aufnimmt.

20. Wir sahen (§ 6, Nr. 12), daß die Funktion $l_x = l(x)$ integrierbar ist, und daß

$$\int_x^\infty l_x\,dx = \int_x^\omega l_x\,dx$$

(es ist $l_x > 0$ für $x < \omega$, $l_x = 0$ für $x \geqq \omega$) die von der ganzen Gruppe vom Alter x ab verlebte Zeit ausdrückt. Die Größe

$$E_x = \frac{1}{l_x}\int_x^\infty l_x\,dx \tag{11}$$

1) *Lexis, Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik,* Jena 1903, S. 57—59.

definiert man als die *fernere mittlere Lebensdauer* oder als die *Lebenserwartung* einer Person des Alters x. Es ist

$$l_x \geqq l_{x+1} \geqq \cdots > l_\omega = 0..$$

Es ist also auch

$$\sum_{n=1} l_{x+n} < \int_0^\omega l_x dx < \sum_{n=0} l_{x+n}$$

oder, falls man setzt:

$$\frac{1}{l_x} \sum_{n=1} l_{x+n} = e_x,$$

$$e_x < E_x < e_x + 1.$$

Wenden wir das Cauchy'sche Postulat an, das bekanntlich in der Form ausgesprochen werden kann: Ist die Variable x der Werte des Intervalls (a, b) fähig, und weiß man nicht, welchen Wert sie tatsächlich hat, so ist

$$x = \frac{a+b}{2}$$

anzunehmen (wodurch der größtmögliche Fehler zu einem Minimum gemacht wird), so bekommen wir für E_x den Ausdruck

$$E_x = e_x + \frac{1}{2} \tag{12}$$

Die englischen Schriftsteller nennen die Größe $e_x + \frac{1}{2}$ die *complete expectation of life* (im Gegensatz zu e_x = *curtate expectation of life*) und bezeichnen sie mit $\mathring{e}_x$.

21. Aus

$$e_x = \frac{\sum_{n=1} l_{x+n}}{l_x}$$

leitet man ab:

$$e_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \frac{\sum_{n=2} l_{x+n}}{l_{x+1}},$$

woraus

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}} = \frac{\mathring{e}_x - \frac{1}{2}}{\mathring{e}_x + \frac{1}{2}} \tag{13}$$

folgt.

22. Der Begriff der *wahrscheinlichen Lebensdauer* weicht von dem eben eingeführten völlig ab. Versteht man unter einer

biometrischen Funktion eine solche, durch welche die fingierte Absterbeordnung l_x völlig definiert wird, so ist streng genommen jene Größe nicht als eine biometrische Funktion zu betrachten. Dies geht offenbar aus ihrer Definition hervor: man nennt die positive Größe W_x die dem Alter x entsprechende wahrscheinliche Lebensdauer, falls sie näherungsweise der Gleichung genügt:

$$l_{x+W_x} = \frac{1}{2} l_x.$$

Es wäre leicht zu beweisen, daß die mittlere und die wahrscheinliche Lebensdauer immer dann in dem Falle übereinstimmen, wo

$$l_x - l_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2} = \cdots$$

ist.

23. Die Hypothese einer stetigen Funktion l_x von x, welche die Anzahl der Lebenden des Alters x ausdrückt, erlaubt die Ausdehnung des Begriffes der Sterbenswahrscheinlichkeit auf Perioden, die kürzer wie ein Jahr oder unendlich kurz sind.

Bezeichnen wir mit $\mu(x)\,dx$ die Größe

$$\frac{l_x - l_{x+dx}}{l_x} = \mu_x dx$$

d. h. um uns so auszudrücken, die Wahrscheinlichkeit, daß (x) im unendlich kleinen Altersintervall $(x, x+dx)$ stirbt. Dann ist

$$l_{x+dx} = l_x(1 - \mu_x dx)$$

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} \tag{14}$$

Aus $l_x \geqq l_{x+h}$ $(h > 0)$ folgt $\frac{dl_x}{dx} = l_x' \leqq 0$ und $\mu_x \geqq 0$ für jeden Wert von x.

μ_x nennen wir *Sterblichkeitsintensität* oder *Sterblichkeitskraft;* letztere Bezeichnung, die von Woolhouse (*force of mortality*) eingeführt wurde, ist besonders bekannt.[1])

1) *v. Bortkievicz, Die mittlere Lebensdauer* (Jena 1893, Seite 4) betont, daß wohl $\mu_x dx$, nicht aber μ_x eine Sterbenswahrscheinlichkeit ist, und schlägt für letztere Größe die Bezeichnung *Dichtigkeit der Sterbenswahrscheinlichkeit* vor. Der Ausdruck *Sterbeintensität* oder *Sterblichkeitsintensität* rührt von *Westergaard (Grundzüge der Theorie der Statistik,* Jena 1890, S. 175) her.

24. Aus der (14)

$$\mu_x dx = -\frac{dl_x}{l_x}$$

folgt, falls man unbestimmt oder zwischen den Grenzen $x_1 < x$ und x integriert:

$$\int \mu_x dx = -\log l_x + c$$

$$\int_{x_1}^{x} \mu_x dx = -\log \frac{l_x}{l_{x_1}} = \log \frac{l_{x_1}}{l_x}$$

oder, falls wir von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen,

$$l_x = c e^{-\int \mu_x dx} \qquad (15)$$

$$\frac{l_{x_1}}{l_x} = e^{-\int_{x_1}^{x} \mu_x dx},$$

woraus für $x = x_1 + 1$ folgt:

$$p_x = p(x, x+1) = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x dx} \qquad (16)$$

$$q_x = q(x, x+1) = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu_x dx}. \qquad (16')$$

25. Man erhält aus

$$-\frac{dl_x}{dx} dx = l_x \mu_x dx$$

$$l_{x_1} - l_{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} l_x \mu_x dx$$

oder, indem man den ersten Mittelwertsatz anwendet:

$$\int_{x_1}^{x_2} l_x \mu_x dx = \mu(x_1 + \Theta(x_2 - x_1)) \int_{x_1}^{x_2} l_x dx$$

$$(0 < \Theta < 1)$$

und

$$\mu(x_1 + \Theta(x_1 - x_1)) = m$$

setzt,

$$m = \frac{\int_{x_1}^{x_2} l_x \mu_x dx}{\int_{x_1}^{x_2} l_x dx} = \frac{l_x - l_x}{\int_{x_1}^{x_1} l_x dx} \qquad (17)$$

Die Größe m ist der Mittelwert aus den Werten der Sterblichkeitsintensität μ_x im Intervall (x_1, x_2): wir nennen sie den Sterblichkeitskoeffizienten desselben Intervalls.[1])

Setzt man in der Gleichung (17) $x_1 = x, x_2 \geqq \omega$, so hat man

$$m = \frac{l_x}{\int_x^{\omega} l_x dx} = \frac{1}{E_x}$$

d. h. der Sterblichkeitskoeffizient des Intervalls (x, ω) ist gleich dem reziproken Wert der mittleren Lebensdauer des Alters x.

Man leitet ferner ab, indem man mit c_x den Sterblichkeitskoeffizienten der einjährigen Altersstufe $(x, x+1)$ bezeichnet:

$$c_x = \frac{d_x}{\int_x^{x+1} l_x dx} = \frac{d_x}{l_x E_x - l_{x+1} E_{x+1}}.$$

26. Die wirkliche Bestimmung der Größe μ_x setzt die Kenntnis eines analytischen Ausdrucks voraus, durch welchen die Funktion l_x von x definiert wird. Daher die Notwendigkeit von Hypothesen über die Funktion l_x, die sie auch für nicht-ganzzahlige Werte der Variablen x bestimmen. Wir können z. B. l_x durch ein Polynom n^{ten} Grades ausdrücken, indem wir setzen:

$$l_{x+z} = f(x+z) = \varphi(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots + \nu z. \qquad (18)$$

Man findet dann $\varphi'(0) = f'(x) = \beta$, und

$$\mu_x dx = -\frac{dl_x}{l_x} = -\frac{\beta}{l_x},$$

wobei die Bestimmung der Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ nach bekannten Methoden erfolgt. Die Gleichung (14) wird im allgemeinen einen desto besseren Wert von μ_x liefern, je größer die Anzahl der Punkte ist, durch welche die Parabel n^{ten} Grades (18) gelegt wird.

1) *v. Bortkiewicz, mittl. Lebensd.*, S. 5, 6.

Es sei $n = 4$ und es gehe die Parabel $l_{x+z} = \varphi(z)$ durch die Punkte

$$f(x-2),\quad f(x-1),\quad f(x),\quad f(x+1),\quad f(x+2).$$

Man findet

$$\mu_x dx = \frac{-f'(x)}{f(x)} = \frac{8[f(x-1)-f(x+1)]-[f(x-2)-f(x+2)]}{12 f(x)}.$$

Analog hätten wir für $n = 3$ bzw. 2 die einfacheren Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{f(x-1)-f(x+1)}{2f(x)}\\[2ex] \dfrac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\end{array}\right\} \qquad (19)$$

und

erhalten.

Die Hypothese, daß $f(x)$ eine lineare Funktion von x ist, aus welcher der Ausdruck (19) folgt, rührt von *de Moivre* her; sie ist die denkbar einfachste und kann nur für sehr kleine Altersstrecken Verwendung finden. Es folgt aus ihr

$$\int_x^{x+1} l_x dx = l_{x+\frac{1}{2}}$$

und

$$c_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{\int_x^{x+1} l_x dx} = \frac{d_x}{l_{x+\frac{1}{2}}} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} d_x}.$$

Die dadurch definierte Größe c_x wird von den englischen Schriftstellern *„zentraler Sterblichkeitskoeffizient“* (*central death rate*) genannt.

27. Nimmt man dagegen an, daß nicht l_x, sondern μ_x eine lineare Funktion von x ist, so findet man:

$$\int_x^{x+1} \mu_x dx = \mu_{x+\frac{1}{2}}$$

$$p_x = e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}}$$

$$q_x = 1 - p_x = \mu_{x+\frac{1}{2}} - \frac{\mu^2_{x+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\mu^3_{x+\frac{1}{2}}}{6} - \cdots \qquad (20)$$

Der Fehler, den wir begehen, indem wir den Ausdruck (20) durch

$$q_x = \mu_{x+\frac{1}{2}} - \frac{\mu^2_{x+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\mu^3_{x+\frac{1}{2}}}{4} + \cdots$$

ersetzen, ist kleiner als

$$\frac{\mu^3_{x+\frac{1}{2}}}{12},$$

so daß wir, je kleiner μ_x ist, mit desto größerer Annäherung setzen können:

$$q_x = \frac{\mu_{x+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}\mu_{x+\frac{1}{2}}}. \qquad (21)$$

Aus der Formel (21) folgt:

$$p_x = \frac{2-\mu_{x+\frac{1}{2}}}{2+\mu_{x+\frac{1}{2}}}$$

und

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = \frac{q_x}{1-\frac{q_x}{2}} = \frac{2(l_x - l_{x+1})}{l_x + l_{x+1}}.$$

28. Ist für $x = \xi$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{d^2 l_x}{dx^2} = 0\\[2ex] -\dfrac{d^3 l_x}{dx^3} < 0\end{array}\right\}, \qquad (22)$$

so definiert man $\xi - x_1$ als die *wahrscheinlichste Lebensdauer eines Individuums des Alters* x_1. Die Gleichungen (22) liefern die Bedingung dafür, daß die Wahrscheinlichkeit

$$\left(-\frac{dl_x}{l_x}\right)_{x=x_1} = \left(-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}dx\right)_{x=x_1},$$

daß (x_1) im Altersintervall $(x, x+dx)$ stirbt, für $\xi = x$, zu einem Maximum wird. Der durch (22) definierte Punkt $x = \xi$ der Kurve $y = l_x$ ist bekanntlich ein Wendepunkt. Daß die wahrscheinliche Dauer des Lebens von (x) im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. Kap. I, § 2) die schon angeführte Größe

$$E_x = \frac{1}{l_x}\int_x^{\infty} l_x dx$$

ist, besagt die Definition derselben, falls man sie nicht aus der von der Gruppe l_x verlebten Zeit $\int_x^{\infty} l_x dx$ ableitet, sondern falls man

von der Wahrscheinlichkeit ausgeht, daß ein Individuum des Alters x_1 im Altersintervall $(x_1, x_1 + dx)$ stirbt, und man diese Wahrscheinlichkeit mit der verlebten Zeit $x - x_1$ multipliziert. Wir bekommen alsdann:

$$\int_{x_1}^{\infty} -\frac{dl_x}{dx}(x - x_1)\,dx = \int_{x_1}^{\infty} l_x\,dx,$$

woraus

$$E_{x_1} = \frac{1}{l_{x_1}} \int_{x_1}^{\infty} dl_x (x - x_1)$$

folgt. Nach der allgemeinen Definition ist aber

$$\frac{1}{l_{x_1}} \int_{x_1}^{\infty} dl_x (x - x_1)$$

der wahrscheinliche Wert von $x - x_1$.

§ 9. **Die Sterblichkeit spezieller Gesamtheiten.**

29. Im Laufe der vorhergehenden Untersuchungen hatten wir angenommen, daß die Sterbenswahrscheinlichkeit eines Individuums (x) einfach Funktion von x und von der Zeitstrecke ist, auf welche sie sich bezieht.

Es fragt sich nun, welche Elemente außer dem Alter und der Zeit einen Einfluß auf die Sterblichkeitsverhältnisse haben, und wie dieser Einfluß zu charakterisieren ist.

Die Frage ist weit entfernt davon, irgendeine Beantwortung zuzulassen; vielleicht ist sie einer strengen Lösung überhaupt nicht fähig. Es ist zwar statistisch festgestellt, daß manche Lebensbedingungen und individuelle Eigenschaften nicht ohne Einfluß auf die Sterblichkeit sind (was übrigens keineswegs überraschend sein kann), wie Geschlecht, wirtschaftliche Lage, Beruf, Lebensart, Gebrauch oder Nichtgebrauch oder übermäßiger Gebrauch von alkoholischen Getränken und von Nervenreizmitteln usw., Zivilstand, atavistische und Vererbungsmerkmale usw.; was aber gewonnen ist, kann vielleicht mehr dazu dienen, den Wunsch weiterer Daten und weiterer Untersuchungen entstehen zu lassen, als praktisch verwendbare Kriterien und Kenntnisse zu liefern.

Eine einzige Ausnahme kann vielleicht betreffs des Geschlechts gemacht werden: die getrennte Bestimmung der weiblichen und der männlichen Sterblichkeit ist eine der Aufgaben, die sich am leichtesten durchführen lassen und die man am wenigsten vernachlässigt hat.

Wir erinnern hier daran, daß die weibliche Sterblichkeit, welche in den ersten Lebensjahren merklich günstiger ist als die männliche, diese letztere vom 10. bis zum 15. Lebensjahre und in Jahren der größten Fruchtbarkeit (vom 27. bis zum 35.) übertrifft, um nach dem 35. Altersjahr wieder günstiger zu werden. Besonders nach dem 50. Lebensjahr weicht sie von der männlichen Sterblichkeit ziemlich stark in günstigem Sinne ab. Der hier angedeutete Verlauf, welcher zuerst von Sterblichkeitstafeln englischer und deutscher Versicherter ans Licht gebracht wurde, kann auch mit dem Vergleich der männlichen und der weiblichen Sterblichkeit der deutschen (in der Periode 1876—1887) und der italienischen Bevölkerung (in der Periode 1871—1881) illustriert werden. Aus den Daten, die sich auf die letztere beziehen, läßt sich die weibliche Übersterblichkeit in den Fruchtbarkeitsjahren besonders deutlich erkennen.

Deutsche Bevölkerung			Italienische Bevölkerung		
Alter	Anzahl der Überlebenden		Alter	Anzahl der Überlebenden	
	Männer	Weiber		Männer	Weiber
0	100000	100000	0	100000	100000
1	74627	78260	1	78690	80670
5	65997	69295	5	62863	64273
10	62089	65237	10	59410	60518
15	60892	63878	15	57914	58759
27	55927	59170	27	52797	53332
30	54454	57566	36	51473	51766
35	51815	54685	35	49321	49178
40	48775	51576	40	46902	46439
50	41228	45245	50	40831	40908
60	31124	36293	60	32319	33229
70	17750	21901	70	19797	20031

Es scheint aber aus neuen holländischen Untersuchungen von Landré und Paraira hervorzugehen, daß, während die Kindersterblichkeit stetig und ununterbrochen abnimmt (die Erscheinung ist auch durch andere Quellen bewiesen und kann nicht in Abrede

gestellt werden), die Verminderung größer für die Knaben ist, so daß eine gewisse Ausgleichung in der vorher angedeuteten Differenz eintritt.

Wir finden uns so veranlaßt, die Frage zu stellen, ob sich die Sterblichkeit zeitlich ändert, und wie sich ändert. Es wird bemerkt, daß neue Todesursachen älteren folgen, so daß im großen und ganzen die Sterblichkeit als konstant anzusehen ist und nur vielleicht eine kleinere Sterblichkeit der wohlhabenden Klassen durch eine größere Sterblichkeit der ärmeren ausgeglichen sei. Man hebt dagegen hervor, daß eine Verminderung der Sterblichkeit im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts doch als statistisch festgestellt zu betrachten sei, indem man sich besonders auf die Ergebnisse der schwedischen Sterblichkeitsstatistik, die bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts zurückreicht und auf die Erfahrungen einzelner Lebensversicherungsanstalten oder einzelner Berufe stützt.[1])

Während jedoch, wie schon bemerkt wurde, eine Verminderung in der Kindersterblichkeit nicht zu leugnen ist, und während die Sterblichkeit in den jüngeren Altersstufen überhaupt günstiger geworden zu sein scheint, findet man für die älteren Altersstufen (vom 50. Jahre ab) eher eine Verschlechterung als eine Verbesserung.[2])

1) *Westergaard, Die Grundzüge usw.*, Seite 165, und die *Lehre von der Mortalität und der Morbilität*, Jena 1902. Diese letztere ist die umfangreichste und vollständigste Behandlung der Vitalstatistik, die wir besitzen.

2) Jedenfalls nach den Untersuchungen, die dem internationalen Versicherungskongreß in Newyork (1904) von den Herren Warner (für die englische Bevölkerung) und Gore (für die nordamerikanische Bevölkerung) vorgelegt wurden. Aber aus der Diskussion ist vor allem klar geworden, daß „zahlreichere statistische Daten und eine größere Übereinstimmung der Erhebungsmethoden nötig wären, um zu allgemeingültigen Resultaten gelangen zu können...“, und daß „die Frage nach der Verminderung der Sterblichkeit keineswegs durch die Arbeiten des Kongresses beantwortet zu sein scheint, im Gegenteil verwickelter erscheinen könnte, als sie vorher war“. Von den zwei Zitaten rührt das erste von einem Bericht her, den Prof. Gobbi für den italienischen Handelsminister erstattete, das zweite von einem Bericht, den Dr. Manes in der *Zeitschrift für die ges. Versicherungswissenschaft* veröffentlichte. Auch für die deutsche Bevölkerung hebt das Kaiserliche Statistische Amt die Unvollkommenheit der Daten hervor, welche die Anzahl der Überlebenden bei einem bestimmten Alter von allen Geborenen des Jahres ausdrücken, aus

Es ist jedoch zu bemerken, daß aus der Erfahrung der englischen Gesellschaften eine Besserung der Sterblichkeitsverhältnisse unter den Versicherten ziemlich deutlich hervorzugehen scheint.

Wir finden, indem wir die Lebenserwartungen der Versicherten vergleichen, deren Versicherung seit mehr als fünf Jahren dauert:

Altersgruppe	Lebenserwartungen	
	1838—1862	1863—1893
20—24	38,45	40,59
25—29	35,39	36,08
30—34	32,04	33,06
35—39	28,53	29,37
40—44	25,02	25,70
45—49	21,55	22,13
50—54	18,20	18,67
55—59	15,02	15,42
60—64	12,05	12,38
65—69	9,41	9,66
70—74	7,05	7,32
75—79	5,15	5,37
80—84	3,67	3,82

30. Werden aber alle anderen Merkmale gleich vorausgesetzt (Alter, Beruf, Rasse usw.), so unterscheidet sich doch eine Gesamtheit Versicherter von einer Gesamtheit Nicht-Versicherter dadurch, daß nur Individuen, welche sich in einem guten Gesundheitszustand befinden, zugelassen wurden, bzw. das Interesse haben, beizutreten. Mit anderen Worten: diese Gesamtheit unterscheidet sich dadurch, daß sie anfänglich und während einer kürzeren oder längeren Zeitperiode eine kleinere Sterblichkeit aufweist infolge einer Auslese, die von der Versicherungsanstalt oder von dem versicherten Individuum selbst ausgeführt wird.

Die Versicherungsoperationen können in zwei Hauptklassen geteilt werden: die Todesfallversicherungen und die Erlebensversicherungen.

Bei den Versicherungen der ersten Klasse wird die versicherte Summe vom Versicherer in der einheitlichen Zeitperiode bezahlt,

dem die betrachteten Überlebenden stammen, was auf die störende Wirkung der Ein- und Auswanderungen und die Unmöglichkeit zurückzuführen ist, über das Jahr 1841 zurückzugehen; die Sterblichkeit der höheren Altersstufen entzieht sich also der Untersuchung.

wo das versicherte Individuum abstirbt — oder wird die Summe bezahlt, falls das Individuum innerhalb einer bestimmten Zeitperiode abstirbt. Es ist also im Interesse des Versicherers, daß der Todesfall des Versicherten möglichst spät eintritt; daher die Zweckmäßigkeit einer ärztlichen Untersuchung, welche alle Individuen von der Versicherung fernhält, deren Gesundheitszustand und Lebensart sie einem frühzeitigen Tode in besonderem Maße auszusetzen scheinen.[1])

Die Individuen (oder, wie man sie auch technisch nennt: die Risiken) können in betreff der Todesfallversicherung in normale, unternormale und minderwertige eingeteilt werden. Die zweite Kategorie enthält diejenigen Risiken, die zwar zur Versicherung zugelassen werden können, aber nur unter erschwerenden Bedingungen.

Die dritte Kategorie enthält die Risiken, die überhaupt nicht annehmbar sind, oder deren Annahme an außerordentliche Bedingungen geknüpft ist[2]); die erste Kategorie: die unter normalen Bedingungen und auf Grund einer vollständigen ärztlichen Untersuchung zugelassenen männlichen Risiken.

Bei den Erlebensversicherungen wird die versicherte Summe nur in dem Falle bezahlt, wo der Versicherte ein gewisses Alter erreicht. Eine derartige Versicherung ist besonders für solche Individuen zweckmäßig, bei denen ein frühzeitiger Tod unwahrscheinlich ist.

Diesen beiden Kategorien sollte man eine dritte hinzufügen: die Kategorie derjenigen Versicherungen, die aus einer Todesfall- und einer Erlebensfallversicherung bestehen (die sog. gemischten Versicherungen). Da aber die Todesfallversicherung normalerweise überwiegend ist, so betrachtet man sie als zur ersten Klasse gehörend.

Jeder Klasse von Versicherten entspricht eine besondere Absterbeordnung; die Sterblichkeit der auf Erlebensfall versicherten

1) Bei den sog. *Volksversicherungen*, d. h. Todesfallversicherungen auf kleine Summen findet keine ärztliche Analyse der Versicherten statt; die Erklärung des Versicherten, gesund zu sein, wird als genügend betrachtet.

2) Die Frage der Versicherung minderwertiger Risiken ist sehr ausführlich in *Blaschkes Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben*, Wien 1895, behandelt worden.

Risiken erweist sich z. B. kleiner, als die Sterblichkeit der Risiken der ersten Klasse.

Im Innern jeder Klasse wird die Äquivalenz der sie bildenden Risiken angenommen. Eine solche Annahme hat nur den Wert einer technischen Fiktion, welche die Bestimmung der Prämien auf Grund von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen erlaubt; es ist vielmehr anzunehmen, daß der größere oder kleinere Betrag der versicherten Summe, oder die größere oder kleinere Dauer der Versicherung nicht ohne Einfluß auf die Sterblichkeit ist.[1]) Die Erfahrung zeigt, daß die Wirkung solcher sekundären Faktoren vorhanden ist, ohne daß es bis jetzt gelungen wäre, sie quantitativ zu bestimmen.

31. Besonders wichtig bei der Untersuchung der Sterblichkeit versicherter Gesamtheiten ist die Berücksichtigung der Zeitperiode, die seit dem Entstehen der versicherten Gruppe verflossen ist. Im Verlaufe der Zeit neutralisiert sich nämlich der Einfluß der anfänglichen Selektion, und die Sterblichkeit der Gesamtheit nähert sich nach und nach derjenigen ähnlicher nicht ausgelesener Gruppen. Man bezeichnet auch als Selektion die eine Folge der Auslese darstellende Tatsache, daß die Sterblichkeit versicherter Individuen in den ersten 3—5 Jahren der Versicherung in stärkerem Maße wächst, als es das Wachsen des Alters der Versicherten mit sich bringen würde, falls es allein wirkte.[2]) Dieser Umstand, der zuerst im Jahre 1851 für die englischen Versicherten von *Higham* hervorgehoben und durch spätere Erfahrungen bestätigt wurde, hat zur Aufstellung von Sterblichkeitstafeln Anlaß gegeben, in denen die Sterbenswahrscheinlichkeit nicht nur nach dem Alter, sondern auch nach der verflossenen Dauer der Versicherung berechnet wird.

Solche sog. „doppelt abgestufte Sterbetafeln“ haben in der letzten Zeit fortschreitende Verbreitung gefunden.

Von der Wirkung der sog. Antiselektion, die in der Tendenz

1) Die Form der Versicherung ist auch deswegen nicht ohne Einfluß, weil die verschiedenen Versicherungsformen von verschiedenen Bevölkerungsklassen bevorzugt werden. Man hat also neben der ärztlichen und neben der Selbstselektion eine dritte Form, die parallel zu diesen wirkt, und die man mit einer sehr glücklichen Bezeichnung „soziale Selektion“ genannt hat.

2) *Bohlmann,* Enzykl. S. 866.

der besten Risiken liegt, sich von der Versicherung loszumachen, werden wir später bei der Besprechung des Rückkaufs von Versicherungen zu reden haben.

§ 10. **Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit bei auserlesenen Gesamtheiten.**

32. Es werde eine bestimmte Versicherungsform betrachtet, und es seien

$$D_0, D_1, D_2, \ldots$$

bzw.

$$L_0, L_1, L_2, \ldots$$

die Anzahl der im Altersintervall $(x, x+1)$ und im Laufe des ersten, zweiten, ... Versicherungsjahres Verstorbenen, bzw. die Anzahl der x-jährigen, die der Versicherung seit 0, 1, 2 ... Jahren angehören. Es sei ferner

$$q_k = \frac{D_k}{L_k}.$$

Wenn wir von der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* sprechen, daß ein x-jähriger, welcher seit k Jahren versichert ist, im Altersintervall $(x, x+1)$ stirbt, so setzen wir dabei die Gleichartigkeit aller Individuen voraus, welche x Jahre alt sind und seit k Jahren versichert sind.

Nach den Betrachtungen der vorhergehenden Nummern ist mindestens bis zu einem bestimmten Werte k von k

$$q_0' < q_1' < q_2' < \cdots, \qquad (\alpha)$$

wobei q_k' die Wahrscheinlichkeit a priori bezeichnet, welcher q_k entspricht. Sehen wir von den Ungleichungen (α) ab und betrachten wir die verschiedenen q_k' als angenäherte Ausdrücke einer konstanten Wahrscheinlichkeit q', die der Gesamtheit aller x-jährigen (identisch in k) zukommt, so ist das Problem der Bestimmung von q offenbar identisch mit dem Problem der Bestimmung a posteriori der Wahrscheinlichkeit, daß man aus Urnen, welche in unbekanntem aber gleichem Verhältnis schwarze und weiße Kugeln enthalten, eine weiße Kugel herausziehen werde.

Es ist in diesem Falle gleichgültig, ob man mehrere Urnen in Betracht zieht oder nur eine einzige, die alle weißen und schwarzen Kugeln enthält. Die Wahrscheinlichkeit q' hat als

aposteriorischen Ausdruck

$$q = \frac{D_0 + D_1 + D_2 + \cdots}{L_0 + L_1 + L_2}.$$

Es darf aber nicht der Umstand unberücksichtigt bleiben, daß der Verschiedenheit der Werte L' eine verschiedene Präzision der Wahrscheinlichkeiten

$$q_0, q_1, q_2 \ldots$$

entspricht. Wollen wir ihn nicht außer acht lassen, so entsteht die Frage der Ableitung eines neuen Ausdrucks für q, welcher an die Hypothese einer angenäherten Gleichheit der Werte L_k nicht gebunden ist. Als zu bestimmende unbekannte Größe können wir annehmen:

a) die Sterbenswahrscheinlichkeit q',

b) die wahrscheinliche Zahl der Todesfälle.

Der mittlere Fehler jeder Wahrscheinlichkeit q_k wird durch die bekannte Relation geliefert:

$$\sqrt{\frac{q_k(1-q_k)}{L_k}} = m_k,$$

so daß im Falle a) das Gewicht jedes Beobachtungswertes proportional zu $\frac{1}{\sqrt{L_k}}$ ist; dagegen ist

$$L_k m_k = \sqrt{L_k q_k (1-q_k)}$$

der mittlere Fehler, falls man als unbekannte Größe die Zahl als Todesfälle ansieht, so daß im Falle b) der mittlere Fehler selbst und das Gewicht proportional zu $\sqrt{L_k}$ bzw. zu $\sqrt{\frac{1}{L_k}}$ sein werden.

Mit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ bezeichnen wir die scheinbaren Fehler

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{D_0}{L_0} + q \\ \lambda_1 &= -\frac{D_1}{L_1} + q \end{aligned}\right\}, \qquad (23)$$

(wo q den zu ermittelnden Wert der Unbekannten q' bedeutet), die dem Fall a) entsprechen; mit

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0' &= -D_0 + L_0 q \\ \lambda_1' &= -D_1 + L_1 q \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

die scheinbaren Fehler im Falle b).

Nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate sollen wir im ersten Fall

$$L_0\lambda_0^2 + L_1\lambda_1^2 + L_2\lambda_2^2 + \cdots, \tag{25}$$

im zweiten

$$\frac{\lambda_0'^2}{L_0} + \frac{\lambda_1'^2}{L^1} + \frac{\lambda_2'^2}{L^2} + \cdots \tag{26}$$

zu einem Minimum machen.

Wir bekommen, indem wir die Ableitungen der Gleichungen (25) und (26) nach q gleich Null setzen, und die Gleichung (23) bzw. die Gleichung (24) berücksichtigen,

$$L_0\left(q - \frac{D_0}{L_0}\right) + L_1\left(q - \frac{D_1}{L_1}\right) + \cdots = 0,$$

$$- D_0 + L_0 q - D_1 + L_1 q + \cdots \doteq 0,$$

woraus in den beiden Fällen

$$q = \frac{D_0 + D_1 + D_2 + \cdots}{L_0 + L_1 + D_2 + \cdots} \tag{27}$$

folgt. Dies ist aber der unabhängig von jeder Berücksichtigung der Gewichte abgeleitete Ausdruck.

33. Ist $L_0 = L_1 = L_2 = \cdots$, so wird Gleichung (26) zu

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots = \text{Minimum},$$

woraus im Falle (a)

$$q = \frac{1}{k}\left[\frac{D_0}{L_0} + \frac{D_1}{L_1} + \cdots + \frac{D_{k-1}}{L_{k-1}}\right] \tag{28}$$

und, falls man die λ durch die λ' ersetzt,

$$\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \cdots = 0,$$

$$q = \frac{L_0 D_0 + L_1 D_1 + \cdots}{L_0^2 + L_1^2 + \cdots} \tag{29}$$

folgt. Im Gegensatz zu (27) entsprechen also (28) und (29) besonderen Fällen, und können nur da angewandt werden, wo die Bedingungen, aus denen sie abgeleitet worden sind, mindestens angenähert erfüllt sind.[1])

1) *Meikle* betrachtete in *On the preparation of a table of mortality from observations of various magnitude* (Transactions of the Actuarial Society of Edinburgh IV, 19) als den einzig korrekten Ausdruck von q. Seine Schlußweise beruht aber auf einer verkehrten Anwendung des Prinzips der kleinsten Quadrate. Vgl. *Landré*, *Das Kombinieren der Sterbenswahrscheinlichkeiten aus verschiedenen Beobachtungsjahren* in Zeitschrift f. d. ges. Versicherungswiss. Bd. IV, Heft III, und besonders die endgültige Behandlung *Czubers*, der Verf. folgt (*Zum Problem der Sterblichkeitsmessung,* ebenda IV, 2).

34. Anders muß aber das Problem gestellt werden, falls man die Werte q_k nicht als Ausdrücke einer konstanten Wahrscheinlichkeit ansieht, die mit zufälligen Fehlern behaftet sind, sondern — in korrekterer Weise und den Ungleichungen α)

$$q_0' < q_1' < q_2'$$

gemäß — als empirische und infolgedessen ebenfalls mit zufälligen Fehlern behaftete Ausdrücke von unbekannten Wahrscheinlichkeiten, von denen jede zu einem bestimmten Wertepaar (k, x) gehört.

Die Größe q' ist also hier als ein Mittelwert aus den partikulären unbekannten Werten $q_0', q_1', \ldots$ aufzufassen.

Es bestehe die Gesamtgruppe, welche man betrachtet, aus

L_0' x-jährigen, die sich im ersten Versicherungsjahr befinden;
L_1' „ „ „ „ zweiten „ „
. . . . . .

und es sei

$$L_0' + L_1' + \cdots = L'.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit q' ist alsdann

$$q' = \frac{L_0'}{L'}q_0' + \frac{L_1'}{L'} + \cdots. \tag{30}$$

oder, falls man die Wahrscheinlichkeit *a priori* durch ihre angenäherten Ausdrücke

$$q_k = \frac{D_k}{L_k}$$

ersetzt,

$$q = \frac{L_0'}{L'}\frac{D_0}{L_0} + \frac{L_1'}{L'}\frac{D_1}{L_1} + \cdots.$$

Gleichung (30) wird im Falle, wo

$$\frac{L_0'}{L_0} = \frac{L_1'}{L_1} = \cdots = \frac{\Sigma L'}{\Sigma L}$$

zu

$$q = \frac{D_0 + D_1 + \cdots}{L_0 + L_1 + \cdots}.$$

Ist also die relative Stärke jeder Klasse von Versicherten (relativ) konstant, so kann wieder der Ausdruck von q angenommen werden, welcher im Falle einer konstanten Wahrscheinlichkeit allgemein gilt.[1])

§ 11. Die Lebenden- und Totengesamtheiten Versicherter.

35. Der Umstand, daß die Sterbenswahrscheinlichkeit auserlesener Leben nicht nur von den Ursachen der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Bevölkerungsstatistik, d. h. von dem Alter und von der Geburtszeit, sondern auch von der Versicherungsdauer abhängt, führt uns dazu, eine Verallgemeinerung der in den §§ 4—6 erörterten formalen Bevölkerungstheorie vorzunehmen. Mit *E. Blaschke*[2]) können wir die Zahl der unabhängigen Variablen $x, y, z, \ldots$, von denen eine bei einer bestimmten Gesamtheit beobachtete Größe

$$u = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

abhängt, die *Mächtigkeit der Gesamtheit* nennen. Es sind also die bevölkerungsstatistischen Gesamtheiten (betreffs der Sterblichkeit) zweimächtig, die Gesamtheiten Versicherter dreimächtig.

Für die zweimächtigen Gesamtheiten reicht eine Darstellung in einer XOY-Ebene aus, wo OX die Zeitachse, OY die Altersachse ist: wir werden hier ganz analog die Variablen x (Geburtszeit), y (Zeit des Eintritts in die Versicherung), z (Zeit der Beobachtung) auf den Achsen eines rechtwinkligen Raumkoordinatensystems abtragen.

Durch die Angabe der Geburtszeit, der Eintrittszeit a_2 und der Beobachtungszeit a_3 ist jede Gesamtheit Versicherter definiert; aus diesen Elementen lassen sich das Eintrittsalter $a_2 - a_1 = a_{12}$ das Beobachtungsalter $a_3 - a_1 = a_{13}$ und die Versicherungsdauer $a_3 - a_2 = a_{23}$ ableiten. Ferner läßt sich ein Individuum nicht nur durch den Wertetripel (a_1, a_2, a_3) definieren, sondern durch irgendeine Verbindung einzelner dieser Zahlen mit den Resultanten a_{12}, a_{13}, a_{23}, vorausgesetzt, daß keines der wesentlichen Bestimmungselemente verloren geht. Gerade wie bei den betrachteten zweimächtigen Gesamtheiten werden die Gesamtheiten der verschiedenen Gattungen durch die Gleichheit bestimmter Merkmale definiert,

1) *Czuber,* ebenda, S. 165.
2) *Vorlesungen über mathematische Statistik,* Leipzig 1906, S. 20.

und es entstehen die Fragen, welche der Gesamtheiten der direkten Beobachtung zugänglich sind, und welche Beziehungen zwischen den Gesamtheiten verschiedener Gattung bestehen.

36. Ist ein bestimmtes Individuum zur Zeit x_1 geboren und zur Zeit y_1 in die Versicherung eingetreten, so wird jeder Punkt der durch $(x_1, y_1, 0)$ gehenden und auf der $y0x$ Ebene senkrechten Geraden ein Lebensmoment des betrachteten Individuums sein und der Endpunkt derselben seine Todeszeit darstellen. Benützen wir eine schon früher eingeführte Ausdrucksweise, so werden wir solche zur z-Achse parallelen Geraden *Lebenslinien* nennen: die Träger der Gesamtheiten von Lebenden sind offenbar unter den Flächen zu suchen, welche die Lebenslinien höchstens einmal schneiden; die Träger der Gesamtheiten von Verstorbenen in den geschlossenen Räumen, die Todespunkte enthalten. Ein und demselben Individuum werden ebenso viele Lebenslinien entsprechen, als es auf Grund verschiedener Auslese versichert worden ist.

Zu den Trägern von Lebendengesamtheiten werden die Ebenen nicht gehören, die parallel zur z-Achse sind: sie enthalten stets nur wenige Lebenslinien in sich. Es reicht dagegen die Betrachtung von sechs Ebenensystemen aus[1]), um die Träger der Lebendengesamtheiten (und dementsprechend von Totengesamtheiten) zu definieren, die zur Ermittelung der nach den gemachten Annahmen verschiedenen Typen von Sterbenswahrscheinlichkeiten (Gleichaltriger, Gleichzeitiger, von gleicher Versicherungsdauer) nötig sind. Diese Ebenensysteme bestehen aus den drei Ebenenscharen, die zu den Koordinatenebenen parallel sind, und aus dem Büschel von Ebenen, welche zu den durch eine Koordinatenachse gehenden, zu den beiden anderen Koordinatenachsen um 45° geneigten Ebenen parallel sind.

Träger der Gesamtheiten gleichzeitig Lebender (kurzweg *englischer Gesamtheiten*) werden die Ebenen des Parallelsystems zu $x0y$ sein; Träger von Gesamtheiten gleicher Versicherungsdauer (*Gotha-Gesamtheiten*), sowie von Gesamtheiten Gleichaltriger (*deutschen Gesamtheiten*), die zur Ebene durch die $0x$-Achse bzw. die zur Ebene durch die $0y$-Achse parallelen Ebenensysteme.

Die Ebenen gleicher Geburtszeit, gleicher Eintrittszeit und gleichen Eintrittsalters begrenzen die zu jedem Träger gehörigen

1) Vgl. zu der ganzen Darstellung *Blaschke,* a. a. O. S. 47—63.

Gesamtheiten. Überhaupt werden ebenso viele Typen oder Arten von Lebendengesamtheiten zu unterscheiden sein, als es Gebilde gibt, welche durch die Schnittlinien des Trägers mit den übrigen s Ebenensystemen erzeugt werden können, höchstens also

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \ldots (i+1)}{(10-i)!}$$

i-Ecke, da sich jedes Ebenensystem mit 2 Parallelen an den Figuren auf jedem Träger beteiligen kann. Aus dem Umstande, daß unter den fünf Parallelensystemen immer je zwei Paare zu einer und derselben Geraden parallel liegen, folgt aber, daß auf jedem Träger nur drei verschiedene Liniensysteme entstehen, und zwar die gleichen Systeme auf allen drei Trägern, nämlich a_1, a_2, a_{12}.

Man hat also den Satz:

Die komplizierteste Begrenzung einer Gesamtheit von Lebenden ist ein Sechseck; aus diesem lassen sich sechs Fünfecke, drei Parallelogramme, sechs Trapeze und zwei Dreiecke ableiten.

Es ist charakteristisch für die den Dreiecken entsprechenden Gesamtheiten, daß der Spielranm der sechs möglichen Bestimmungsstücke, die jedes Individuum definieren, ein Jahr ist. Dagegen entsprechen den drei Parallelogrammen *Hauptgesamtheiten*, und ihre Grenzlinien sind so beschaffen, daß die für jedes Individuum der Gesamtheit in Betracht kommenden Bestimmungsstücke teils einen einjährigen, teils einen zweijährigen Spielraum haben.

Welche Bestimmungsstücke für die verschiedenen Gesamtheiten einen einjährigen Spielraum haben (: eindeutig sind), und welche einen zweijährigen Spielraum (:zweideutig sind), ergibt sich aus folgender Zusammenstellung:

Träger der Gesamtheit	Begrenzung	Unter den nicht benannten Bestimmungsstücken sind		Gattung der Gesamtheit
		eindeutig	zweideutig	
a_3	a_1 a_2 a_{12} a_2 a_{12}	a_{13} a_{23} a_{13}	a_{12} a_2 a_{23} a_1 a_{12}	englische Gesamtheit
	a_1 a_2 a_{12} a_2 a_{12}	a_3 a_3 a_{23} a_{23}	a_{12} a_{23} a_2 a_1 a_3	deutsche Gesamtheit
a_{23}	a_1 a_2 a_{12} a_2 a_{12}	a_3 a_{13} a_3 a_{13}	a_{12} a_{13} a_2 a_3 a_1	Gotha-Gesamtheit

Analog wird man die Totengesamtheiten methodisch entwickeln, indem man von den möglichen Körpern ausgeht, welche von sechs Ebenensystemen begrenzt werden. Beschränkt man sich ferner auf die Betrachtung der Sechs- und Fünfflächner, und läßt man von diesen Gebilden nur diejenigen zur Bildung von Wahrscheinlichkeiten zu, welche mit Hilfe der gewonnenen Lebendengesamtheiten zu eigentlichen Wahrscheinlichkeiten führen, so bekommen wir 9 Sechsflächner und 6 Fünfflächner, welche auf den entsprechenden Lebendengesamtheiten aufstehen und parallel zu $0z$ Seiten besitzen.

Wir erhalten so schließlich für die hier kurz wiedergegebene Blaschkesche Darstellung die fundamentalen Ergebnisse: Es gibt nicht weniger als 15 Sterbenswahrscheinlichkeiten für Versicherte, und zwar 9 Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche aus Hauptgesamtheiten, und 6 Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche aus Grund-(Dreiecks-)Gesamtheiten von Lebenden hervorgehen. Alle diese Sterbenswahrscheinlichkeiten sind wesentlich verschieden.

37. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten zerfallen in drei Gruppen, und zwar die Sterbenswahrscheinlichkeiten Gleichaltriger, Gleichzeitiger und von Personen gleicher Versicherungsdauer. Jede dieser Gruppen geht von Lebenden aus, welche zwischen zwei um ein Jahr auseinander liegenden a) Geburtszeiten und Eintrittszeiten; b) Geburtszeiten und Eintrittsaltern, c) Eintrittszeiten und Eintrittsaltern enthalten sind und im Falle a) überdies noch durch eine Linie der Eintrittsalter begrenzt sein können, indem die Individuen entweder a′) dem niedrigeren oder a″) dem höheren der möglichen Alter angehören.

38. Indessen kommt den hier erwähnten Überlegungen nur eine theoretische Bedeutung zu. Praktisch gehen wir von der Annahme der Existenz einer Absterbeordnung aus, so daß die Sterbenswahrscheinlichkeit Versicherter einfach als eine Funktion von dem Beitrittsalter a_{12} und dem Beobachtungsalter a_{13} erscheint. Wir können zu diesen das von ihnen abhängige Bestimmungselement

$$a_{23} = a_{13} - a_{12}$$

hinzufügen.

Den Trägern a_{23}, a_{13} entsprechen bzw. die durch die Begrenzungen a_{12} und a_{13} und a_{12} und a_{23} definierten Gesamtheiten von Lebenden, die als Gothaer und als deutsche Gesamtheiten von Lebenden bezeichnet werden. Zu diesen tritt die Gesamtheit

hinzu, die an einem bestimmten Datum (a_3) besteht und sich entweder hinsichtlich

a) der Versicherungsdauer und des Alters; oder

b) der Versicherungsdauer und des Eintrittsalters; oder

c) des Eintrittsalters und des Alters um ein Jahr unterscheidet.

Sie ist also gegeben, falls für jedes an einem bestimmten Tage beobachtete Individuum zwei von den drei Bestimmungselementen a_{13}, a_{23}, a_2 mit einem Spielraum von einem Jahre gegeben sind.

Die Ermittelung der deutschen Gesamtheiten erfordert dagegen für jedes Eintrittsalter $(y, y+1)$ nur das Alter, in dem das beobachtete Individuum aus der versicherten Gruppe ausscheidet.

§ 12. **Die Ausgleichung von Sterbetafeln.**

39. Die für ganzzahlige Werte des Arguments direkt beobachteten Werte der Funktion

$$y = q(x, x+1) = q_x$$

sind normalerweise nicht so beschaffen, daß man sie mit einem regulären Kurvenzuge verbinden kann. Es zeigt sich vielmehr, daß benachbarten Altern merklich verschiedene Werte von y entsprechen, und daß die Differenzen $q_{x-1} - q_x$, die zu den verschiedenen Werten von x gehören, eine Reihenfolge bilden, bei der sich in bezug auf Größe und Vorzeichen kein bestimmtes Gesetz konstatieren läßt.

Die Ausgleichung einer Sterbetafel hat den Zweck, das direkt beobachtete Wertsystem durch ein anderes zu ersetzen, welches dem ersteren möglichst nahe kommt, aber zugleich gewissen Regelmäßigkeits- und Einfachheitsbedingungen genügt.

Jedes Ausgleichungsverfahren ist also auf die ausdrückliche oder stillschweigend angenommene Voraussetzung gegründet, daß es ein Sterblichkeitsgesetz gibt, welches eines relativ einfachen analytischen Ausdrucks fähig ist, und das man durch

$$q_x = F(x, a, b, c, \ldots) \qquad (a)$$

ausdrücken wird, wo F das Symbol eines gegebenen funktionalen Zusammenhangs ist, der die Unabhängige x ($a, b, c, \ldots$ konstant angenommen) mit der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x verbindet.

Es ist dann möglich, aus der Kenntnis ebenso vieler Werte q_x, als die Anzahl der in (α) auftretenden Parameter beträgt, den Wert derselben zu bestimmen und somit das Sterbegesetz einer bestimmten Gesamtheit.

40. Es könnte gefragt werden, was unseren Glauben an die Einfachheit der Sterblichkeitsgesetze rechtfertigt.

Eine Antwort darauf ist nicht leicht. Die Behauptung, daß, falls man die Fehler eliminiert habe, die ermittelten Wahrscheinlichkeiten eine reguläre Reihenfolge bilden werden, weil die Sterblichkeit, wie alle Naturerscheinungen, stetigen Gesetzen gehorchen müsse[1]), erfordert ihrerseits, gegründet zu werden.

Korrekter ist es dagegen, zu behaupten, daß, falls wir einen stetigen und möglichst einfachen Kurvenzug zwischen den durch die Erfahrung ermittelten Werten der Funktion q_x zeichnen, wir den bequemsten unter allen den möglichen und gleichberechtigten Verläufen der ausgeglichenen Kurve wählen.

Man nimmt also die Einfachheit alles dessen an, was ebensogut einfach wie kompliziert sein kann, so daß es sich nur darum handeln wird, zu beweisen, daß die Unregelmäßigkeit des Verlaufs der beobachteten Kurve $y = q_x$ auch ohne die Annahme einer Unregelmäßigkeit des Sterblichkeitsgesetzes erklärt werden kann.

Dies ist offenbar möglich.

Der Bestimmung *a posteriori* des Wertes einer Wahrscheinlichkeit kann ein desto größerer Fehler anhaften, je kleiner die Anzahl der Beobachtungen ist, aus welchen der Beobachtungswert hervorgeht.

Gilt das Gaußsche Fehlergesetz, so besteht die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

dafür, daß der begangene Fehler innerhalb der Grenzen

$$-\lambda m \text{ und } \lambda m$$

1) *Potérin du Motel, Théorie des Assurances sur la vie,* Paris 1899, S. 112.

enthalten ist, falls s die Anzahl der Beobachtungen und

$$m = \sqrt{\frac{q(1-q)}{s}}$$

den entsprechenden mittleren Fehler ausdrücken (vgl. Kap. I, § 5, S. 44). Da nun der mittlere Fehler umgekehrt proportional zu $\sqrt{s}$ ist, so sind relativ erhebliche Fehler nicht nur möglich, sondern auch wahrscheinlich, speziell für die Altersstufen, denen besonders kleine Werte von s entsprechen.

Hierzu kommt, daß auch einer mit größter Sorgfalt durchgeführten Beobachtung Unsicherheiten und Fehlerursachen anhaften, die teils von der Notwendigkeit bestimmter Hypothesen abhängen (betreffs der Wirkung von Ein- und Auswanderungen, oder des Übergangs von Gesamtheiten zweiter oder dritter Gattung zu Gesamtheiten des ersten), welche nur teilweise der Wirklichkeit entsprechen, teils von fehlerhaften Altersbestimmungen und dgl. herrühren.

In der Praxis versucht man den Einfluß beider Fehlerklassen zu einem Minimum zu machen, indem man die Sterbenswahrscheinlichkeit möglichst ausgedehnter Gesamtheiten bestimmt; daher die Zweckmäßigkeit, das Beobachtungsmaterial verschiedener Versicherungsanstalten und mehrerer Jahrgänge als ein einheitliches Ganzes zu betrachten. Dies kann indessen nur insoweit geschehen, als die Homogeneität der Beobachtungen vorausgesetzt werden darf.

41. Erscheint dermaßen die Zulässigkeit einer Ausgleichung erwiesen, so kann man dieselbe durchführen, indem man

a) entweder von jedem Sterblichkeitsgesetz absieht;

b) oder indem man sich auf ein solches stützt.

Die erste Ausgleichungsmethode werden wir *mechanisch* oder *graphisch* nennen, die zweite *analytisch*.

Dem mechanischen Ausgleichungsverfahren liegt die Annahme einer zwischen Nachbarwerten bestehenden Beziehung zugrunde.

§ 13. **Die analytische Ausgleichung.**

I. Die Sterblichkeitsgesetze.

42. Ist die Zahl der Parameter $a, b, c, \ldots$ in

$$q_x = F(x, a, b, c \ldots) \qquad \text{(a)}$$

ebenso groß wie die Zahl der in der Sterbetafel vorkommenden

Werte von q_x und daher gleich der Zahl der beobachteten Werte, so würde F diese letzteren genau liefern; das beobachtete und das ausgeglichene Wertesystem würden völlig übereinstimmen.

Eine Ausgleichung würde also nicht stattfinden. Demgegenüber bildet es ein interessantes Problem, zu einer Form von F zu gelangen, welche zugleich möglichst wenige Parameter enthält und eine Kurve charakterisiert, die sich dem durch die beobachteten Werte bestimmten Polygonzug möglichst gut anpaßt.

Beiden Forderungen genügt für normale Risiken und für die Altersstufen, bei welchen gewöhnlich die Versicherung stattfindet (nicht unter 20 Jahren), das sogenannte Gompertz-Makehamsche Gesetz, dessen analytische Eigenschaften ihm einen besonderen Wert bezüglich der technischen Anwendungen verleihen.

Anderen einfacheren Gesetzen, die vor diesem vorgeschlagen worden sind, kommt gegenwärtig — soweit sie Sterblichkeitsgesetze sind — nur noch eine historische Bedeutung zu; anderen allgemeineren ein Wert, der bis jetzt lediglich theoretisch ist.

43. Von den ersteren haben wir schon die *de Moivre*sche Hypothese erwähnt, nach welcher die Anzahl l_x der Überlebenden des Alters x eine lineare Funktion des Alters ist. Nach *de Moivre* (der sich auf die *Halley*sche Tafel stützte) ist 85 das höchste Lebensalter; es ist also $l_{86} = 0$. Daraus folgt, daß, falls a die jährliche Anzahl der Sterbefälle ist,

$$l_x = a(86 - x).$$

Nehmen wir dagegen an, daß nicht l_x, sondern die jährliche Sterbenswahrscheinlichkeit $q_x = 1 - p_x$ konstant und gleich $1 - \alpha$ ist, dann ist die Überlebensfunktion l_x eine Exponentialfunktion. Wir haben in der Tat gesehen, daß

$$l_x = l_0 \prod_{x=0}^{x=x-1} p_x,$$

woraus, wegen $p_x = 1 - q_x = \alpha$,

$$l_x = l_0 \alpha^x$$

folgt.

Ebenfalls konstant, und gleich $\frac{1}{\alpha}$ ist in diesem Falle die Sterbeintensität $-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = \mu_x$.

44. Von größerem Interesse ist die Betrachtung der Annahme

$$\mu_x = a + bx,$$

wo a und b konstant sind. Aus

$$\mu_x dx = -\frac{dl_x}{l_x}$$

folgt

$$l_x = e^{\alpha - ax - \frac{b}{2}x^2} = e^{\alpha - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2}, \tag{31}$$

falls α die Integrationskonstante (durch $l_0 = \alpha$ definiert) und

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = \frac{b}{2}$$

ist.

Die Funktion (31) besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft. Betrachten wir r Individuen (x), (y), (z), ... Es ist dann offenbar

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{l_{y+n}}{l_y}\frac{l_{z+n}}{l_z}\cdots = \frac{e^{\alpha - \alpha_1(x+n) - \alpha_2(x+n)^2}}{e^{\alpha - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2}} \cdot \frac{e^{\alpha - \alpha_1(y+n) - \alpha_2(y+n)^2}}{e^{\alpha - \alpha_1 y - \alpha_2 y^2}}$$
$$= e^{-\alpha_1 rn - \alpha_2 rn^2 - 2\alpha_2 n(x+y+z+\cdots)}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß alle Individuen nach r Jahren noch leben. Setzen wir

$$\frac{x+y+z+\cdots}{r} = \xi,$$

so ist

$$e^{-\alpha_1 rn - \alpha_2 rn^2 - 2\alpha_2 r\xi n} = e^{-\alpha_1 rn - \alpha_2 rn^2 - 2\alpha_2 n(x+y+z+\cdots)}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß r Individuen des Alters ξ das Alter $\xi + n$ erreichen. Da ξ von n unabhängig ist, so stimmen die Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten Gruppe $\{x, y, z, \ldots\}_r$ mit denen der zweiten $\{\xi, \xi, \xi, \ldots\}_r$ überein.

45. Eine analoge Eigenschaft besitzt das *Gompertz-Makeham*sche Gesetz.

Beide Schriftsteller gehen von der Annahme aus, daß die Sterblichkeit von zwei verschiedenen Ursachenkomplexen abhängt: von äußerlichen und zufälligen Todesursachen, die vom physischen Zustand und infolgedessen vom Alter jedes einzelnen Individuums unabhängig sind, und von Ursachen, die mit dem Alter variieren, und zwar so, daß sie nach einem bestimmten Alter mit dem Alter wachsen.

Gompertz beschränkt sich darauf, die Sterbeintensität als eine mit dem Alter geometrisch wachsende Größe anzunehmen; in

konsequenterer Weise fügt *Makeham* einen konstanten Faktor hinzu, um eben die Wirkung des Zufalls auszudrücken. Nach ihm ist also nicht die Sterbeintensität, sondern die Differenz zwischen zwei Sterbeintensitäten eine geometrisch wachsende Funktion des Alters.

Setzen wir nun

$$\mu_x = A + Bc^x,$$

indem wir unter A, B, c konstante Größen verstehen. Aus

$$-\frac{dl_x}{l_x} = (A + Bc^x)dx$$

leiten wir ab

$$\log l_x = -Ax - \frac{B}{\log c}c^x + \log k$$

$(k = l_0)$ oder, falls

$$-A = \log s, \quad -\frac{B}{\log c} = \log g$$

$$\log l_x = x \log s + c^x \log g + \log k$$

$$l_x = ks^x g^{c^x}. \tag{32}$$

Hätten wir die Konstanten eingeführt

$$A = \alpha, \quad \frac{B}{\log c} = \beta, \quad k = C, \quad c = e,$$

so hätten wir statt der bei den englischen Schriftstellern üblich gewordenen Form (32), die andere bekommen

$$l_x = Ce^{-\alpha x - \beta e^{\gamma x}}, \tag{33}$$

die für manche Zwecke bequemer ist.

Die Konstante $k = C$ ist völlig willkürlich; die Überlebenswahrscheinlichkeit p_x ist von ihr unabhängig:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = sg^{(c-1)c^x}.$$

Wesentliche Parameter sind es also drei.

Aus der Makehamschen Formel leitet man die Gompertzsche ab, indem man setzt

$$A = -\log s = \alpha = 0, \quad s = 1.$$

Formel (32) und Formel (33) werden bzw.

$$l_x = kg^{c^x} = Ce^{-\beta e^{\gamma x}},$$

woraus

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = g^{(c-1)c^x}$$

folgt.

46. Ist $p(x, x+n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß (x) das Alter $x+n$ erreicht, so ist

$$p(x, x+n) = e^{-\int_x^{x+n} \mu_x dx}$$

oder, für

$$\mu_x = A + Bc^x = \alpha + \beta \log c \cdot c^x$$

$$p(x, x+n) = e^{-\alpha n - \beta c^x (c-1)}.$$

Betrachten wir r Individuen $(x), (y), (z) \ldots$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle nach x Jahren noch leben:

$$e^{-\alpha n - \beta c^x (c^n - 1)} \cdot e^{-\alpha n - \beta c^y (c^n - 1)} \ldots = e^{-\alpha r n - \beta \{c^x + c^y + c^z + \cdots\}},$$

so daß

$$e^{-\alpha \varrho n - \beta \varrho c^\xi (c^n - 1)}$$

die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß ϱ Individuen, die alle ξ-altrig sind, das Alter $\xi + n$ erreichen.

Dafür, daß die zu den beiden Gruppen $\{x, y, z, \ldots\}_r$ und $\{\xi, \xi, \ldots\}_\varrho$ gehörigen Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen, ist hinreichend, daß

$$\begin{aligned} -\alpha \varrho n - \beta (c^n - 1) c^\xi \varrho \\ = -\alpha r n - \beta (c^n - 1) \{c^x + c^y + c^z + \cdots\} \end{aligned} \tag{34}$$

ist. Im Falle des Gompertzschen Gesetzes ist $\alpha = 0$. Gleichung (34) ist in diesem Falle erfüllt, wenn

$$\varrho c^\xi = c^x + c^y + c^z + \cdots \tag{35}$$

oder, für $\varrho = 1$, wenn

$$c^\xi = c^x + c^y + c^z + \cdots. \tag{36}$$

Da ξ von n unabhängig ist, so ist es gleichgültig, ob man eine Gruppe von r Individuen $\{x, y, z, \ldots\}_r$ oder ein einziges Individuum betrachtet, dessen Alter ξ der Gleichung (36) genügt; die Überlebenswahrscheinlichkeiten der Gruppe sind mit denjenigen von (ξ) identisch. Die hierdurch definierte Eigenschaft nennen wir die *Gompertz*sche.

Es sei $\alpha \neq 0$, d. h. es werde die Makehamsche Hypothese vorausgesetzt. Gleichung (34) ist befriedigt, falls $\varrho = r$ und

$$r c^\xi = c^x + c^y + c^z + \cdots \tag{37}$$

ist. Es ist hier gleichgültig, ob man eine Gruppe von verschiedenaltrigen oder eine Gruppe von gleichaltrigen Individuen betrachtet, deren Alter ξ der Gleichung (37) genügt. Wir nennen die durch diese Gleichung definierte Eigenschaft die *Makehamsche Eigenschaft.*

47. Wie wir gesehen haben, ist die Makehamsche Eigenschaft der gleichnamigen Überlebensfunktion (infolgedessen auch der Gompertzschen Funktion, die ein partikulärer Fall der ersteren ist) sowie der Überlebensfunktion

$$l_x = e^{\alpha - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2}$$

gemeinsam, die wir aus der Annahme

$$\mu_x = a + bx$$

abgeleitet haben.

Man beweist, daß sie auch nur diesen Funktionen zukommt. Der Beweis gründet sich auf den folgenden durchaus allgemeinen Satz von *Quiquet.*[1])

„Ist $\varrho < r$, so ist dafür, daß die Überlebenswahrscheinlichkeit einer Gruppe $\{x_1 x_2 \ldots x_r\}$ von r Individuen nur von der Überlebenszeit t und den ϱ Altern $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_\varrho$ abhängt, notwendig und hinreichend, daß die erste Ableitung der Sterbeintensität μ_x

$$\mu_x = -\frac{dl_x}{dx} \frac{1}{l_x}$$

einer linearen homogenen Differentialgleichung ϱ-ter Ordnung genügt."

Ist G eine Funktion von $t, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_\varrho$ und nur von diesen Variablen, so verlangt man, daß

$$\frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}} \frac{l_{x_2+t}}{l_{x_2}} \cdots \frac{l_{x_r+t}}{l_{x_r}} = G(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho, t)$$

1) *A. Quiquet, Représentation algébrique des tables de survie. Généralisation des lois de Gompertz, de Makeham* etc. Bulletin de l'Inst. des Actuaires Français, Bd. IV, Heft 14.

ist. Man bekommt, indem man logarithmisch nach t differentiiert und

$$\frac{-G'}{G} = F$$

setzt,

$$\frac{l'_{x_1+t}}{l_{x_1+t}} + \frac{l'_{x_2+t}}{l_{x_2+t}} + \cdots \frac{l'_{x_r+t}}{l_{x_r+t}} = -F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varrho, t)$$

oder, da

$$\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}} = -\mu_{x+t}$$

$$\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + \cdots + \mu_{x_r+t} = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varrho, t). \qquad (38)$$

Leitet man Gleichung (38) wiederum nach t ab, und bezeichnet man bzw. mit

$$F_0, F_1, \ldots, F_\varrho$$

die Werte der Funktion F und ihrer ϱ ersten Ableitungen für $t = 0$, so bekommt man das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots + \mu_{x\varrho} = F_0 \\ \mu'_{x_1} + \mu'_{x_2} + \cdots + \mu'_{x_\varrho} = F_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu^{(\varrho)}_{x_1} + \mu^{(\varrho)}_{x_2} + \cdots + \mu^{(\varrho)}_{x_\varrho} = F_\varrho \end{array}\right\}. \qquad (39)$$

Die rechten Glieder des Systems (39) sind durch eine Relation miteinander verbunden. Dies geht aus der Betrachtung hervor, daß ihre Zahl $\varrho + 1$ ist, während ϱ die Zahl der Größen ist, von denen sie abhängen.

Daraus folgt, daß auch die linken Seiten nicht voneinander unabhängig sind, so daß die Funktionaldeterminanten von $\varrho + 1$ der r Variablen der $\varrho + 1$ Funktionen identisch Null sein werden.

Es sei z. B.

$$\begin{vmatrix} \mu'_{x_1} & \mu'_{x_2} & \cdots & \mu'_{x_{\varrho+1}} \\ \mu''_{x_1} & \mu''_{x_2} & \cdots & \mu''_{x_{\varrho+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu^{(\varrho+1)}_{x_1} & \mu^{(\varrho+1)}_{x_2} & \cdots & \mu^{(\varrho+1)}_{\varrho+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist dann auch, falls $a_0, a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ Konstante sind:

$$a_0 \mu'_{x_i} + a_1 \mu''_{x_i} + \cdots a_\varrho \mu^{(\varrho+1)}_{x_i} = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \varrho + 1). \qquad (40)$$

Sind aber ϱ Alter gegeben, so ist das $\overline{\varrho + 1}$-te Alter bis auf einen konstanten Faktor bestimmt; denn die Verhältnisse von ϱ der $\varrho + 1$ Konstanten

$$a_0, a_1, \ldots, a_\varrho$$

zu einer derselben können durch ein System von ϱ linearen Gleichungen definiert werden: das $\overline{\varrho + 1}$-te Alter, das den $\varrho + 1$ Gleichungen des Systems (41) genügt, ist unabhängig von den ϱ Altern und willkürlich. Daher wird die Gleichung

$$a_0 \mu'_x + a_1 \mu''_x + \cdots + a_\varrho \mu^{(\varrho+1)}_x = 0$$

identisch in x befriedigt sein. W. z. b. w.

Quiquet nennt die Größe ξ *actuariens* und *Überlebensgesetz* ϱ^{ter} *Ordnung* die Absterbeordnung, nach welcher die Wahrscheinlichkeit des Überlebens am Ende der Zeit t nur Funktion von t und von den ϱ „actuariens"

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$$

ist.

48. Es sei $\varrho = 1$. Dann gilt:

$$a_0 \mu_x' + a_1 \mu_x'' = 0, \qquad (41)$$

und es sind zwei Fälle möglich.

Fall I: Es ist

$$\frac{a_0}{a_1} = -\tau \neq 0.$$

Setzen wir in Gleichung (41)

$$\mu_x' = e^{\alpha x},$$

so bekommen wir die charakteristische Gleichung

$$e^{\alpha x}\{\alpha - \tau\} = 0$$

$$\alpha - \tau = 0$$

die $\alpha = \tau$ ergibt.

Wir bekommen durch Einführung der Integrationskonstante $k\tau$

$$\mu_x' = k\tau e^{\tau x}$$
$$\mu_x = k e^{\tau x} + C$$

oder, für $C = A$, $k = B$, $\tau = \log c$

$$\mu_x = A + Bc^x$$

und damit die Makehamsche $(A \neq 0)$ bzw. die Gompertzsche Formel $(A = 0)$.

Fall II: Es ist $a_0 = 0$.[1]) Dann ist auch

$$\mu_x'' = 0$$
$$\mu_x' = \text{Konstans} = b$$
$$\mu_x = \alpha + bx.$$

Ein dritter Fall ist nicht möglich; die durch die Identität

$$\frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2+t}}{l_{x_2}} \cdots \frac{l_{x_r+t}}{l_{x_r}} = G(\xi, t)$$

definierte Makehamsche Eigenschaft gehört also ausschließlich den Funktionen (31) und (33) an.

49. Es sei $\varrho = 2$. Aus

$$a_0 \mu_x' + a_1 \mu_x'' + a_2 \mu_x''' = 0$$

leiten wir ab, falls wir setzen

$$\frac{a_0}{a_2} = b_2, \quad \frac{a_1}{a_2} = b_1, \quad \mu_x' = e^{\alpha x}$$
$$e^{\alpha x}\{\alpha^2 + b_1 \alpha + b_2\} = 0.$$

Es seien α_1 und α_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^2 + b_1 \alpha + b_2 = 0$$

Dann sind vier Fälle möglich, die wir getrennt behandeln wollen.

Fall I: Es ist $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$.
Es ist dann auch, falls $\gamma_1 \alpha_1^2$, $\gamma_2 \alpha_2^2$ die Integrationskonstanten sind;

$$\mu_x' = \gamma_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} + \gamma_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x}$$
$$\mu_x = \beta + \gamma_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \gamma_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \qquad (42)$$
$$l_x = e^{k - \beta x - \gamma_1 c_1^x - \gamma_2 c_2^x},$$

falls

$$\alpha_1 = \log c_1, \quad \alpha_2 = \log c_2, \quad \gamma_1 \alpha_1 = \beta.$$

1) Aus $\varrho = 1$ folgt die Unmöglichkeit der Annahme $a_1 = 0$.

Fall II: Es ist $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$. Sind dann $\alpha^2\gamma_1$ und $\alpha^2\gamma_2$ die Integrationskonstanten, so hat man

$$\mu_x' = \alpha^2 \gamma_1 e^{\alpha x} + \alpha^2 x \gamma_2 e^{\alpha x}$$
$$\mu_x = \alpha \gamma_1 e^{\alpha x} + \gamma_2 e^{\alpha x}(\alpha x - 1) + k,$$

woraus man leicht ableitet, falls man mit k, k_1, k_2, k_3 die Konstanten des endgültigen Ausdrucks bezeichnet,

$$l_x = e^{k - k_1 x - (k_2 + k_3 x) c^x}. \qquad (43)$$

Fall III: Es ist $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha \neq 0$. Sind $2\beta_2$ und $\gamma\alpha^2$ die Integrationskonstanten, so hat man

$$\mu_x' = 2\beta_2 + \gamma \alpha^2 e^{\alpha x}$$
$$\mu_x = \beta_1 + 2\beta_2 x + \gamma \alpha e^{\alpha x} \qquad (44)$$
$$l_x = e^{\beta - \beta_1 x - \beta_2 x 2 - \gamma c^x},$$

wobei $e^\alpha = c$ gesetzt wird.

Fall IV: Es ist endlich $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Dann ist

$$\mu_x''' = 0$$
$$\mu_x = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 \qquad (45)$$
$$l_x = e^{\beta - \beta_1 x - \beta_2 x - \beta_3 x^3}.$$

Formel (42) war schon rein empirisch von *Lazarus* abgeleitet und von ihm auf die Tafel der siebzehn englischen Gesellschaften angewandt worden; Formel (44) hatte Makeham vorgeschlagen, als Weiterentwicklung des Gompertzschen Gesetzes.[1]) Die durch die Relation

$$\frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2+t}}{l_{x_2}} \cdots \frac{l_{x_r+t}}{l_{x_r}} = G(\xi_1, \xi_2, t)$$

definierte Eigenschaft ist beiden Formeln und den Formeln (43) und (45) gemeinsam.

Quiquet bemerkt, daß, wenn auch die Gesetze erster Ordnung vom *Gompertz* und *Makeham* nicht immer mit genügender Annäherung Tafeln empirischer Werte darstellen, sie doch der Wirklichkeit so nahe kommen, daß die Erwartung berechtigt erscheint, es können einige nicht wesentliche Veränderungen in der

1) *Lazarus: Über Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen*, Hamburg 1867; *Makeham: On the further development of Gompertz's law* (Journal of the Inst. of Actuaries, XVIII).

Form derselben sie zur Interpolation von Überlebenstafeln völlig angemessen machen. Die Überlebensgesetze zweiter Ordnung sind aber nur Verallgemeinerungen derjenigen der ersten, und diesen so ähnlich, daß „on a toute raison d' espérer rencontrer l'expression analytique de la loi naturelle de survie, latente sous la table numérique qu'ont fournie des observations directes"[1]). Daß, umgekehrt, um einen knappen Ausdruck *Bohlmanns* zu gebrauchen, nicht die Natur, sondern der Rechner das „Gesetz" vorschreibt, folgt für uns aus den Überlegungen des vorherigen Paragraphen.

50. Genau wie das eben behandelte läßt sich das allgemeinere Problem erledigen:

„Ist die Gruppe $\{a, b, \ldots k\}$ gegeben, die aus N Individuen besteht, deren Überlebensgesetze einander gleich oder voneinander verschieden und bzw. durch die Funktionen $l_1(x), l_2(x), \ldots l_N(x)$ definiert sind, so wird nach der Bedingung dafür gefragt, daß sich das Produkt

$$\frac{l_1(a+t)}{l_1(a)} \cdot \frac{l_2(b+t)}{l_2(b)} \cdots \frac{l_N(k+t)}{l_N(k)}$$

als eine Funktion G von t und von $n < N$ Veränderlichen α, β, θ darstellen läßt, d. h. daß

$$\frac{l_1(a+t)}{l_1(a)} \cdot \frac{l_2(b+t)}{l_2(b)} \cdots \frac{l_N(k+t)}{l_N(k)} = G(\alpha, \beta, \ldots, \theta; t)$$

ist."

Man findet, genau wie für den besonderen Fall $l_1(x) = l_2(x) = \cdots = l_N(x)$, daß diese Forderung dann und nur dann erfüllt ist, wenn die Ableitungen der Sterbeintensitäten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_N$, die den Überlebensfunktionen $l_1(x), l_2(x), \ldots l_N(x)$ entsprechen, den homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genügen:

$$A_0\mu_1'(x) + A_1\mu_1''(x) + \cdots + A_n\mu_1^{(n+1)}(x) = 0$$
$$A_0\mu_2'(x) + A_1\mu_2''(x) + \cdots + A_n\mu_2^{(n+1)}(x) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_0\mu_N'(x) + A_1\mu_N''(x) + \cdots + A_n\mu_N^{(n+1)}(x) = 0.$$

Die Größen $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_N'$ hängen also alle von den Wurzeln r_i der charakteristischen Gleichung ab:

$$A_0 + A_1 r + \cdots + A_n r^n = 0,$$

1) *Quiquet:* a. a. O. S. 150.

die ihre Ordnung n bestimmt; das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung enthält aber noch dazu n willkürliche Konstanten, über welche man derart verfügen wird, daß die Glieder, in denen einzelne der r_i vorkommen, verschwinden. Es wird allgemein

$$l_g = e^{-\int \mu_g(x)\,dx} = e^{A + Bx + \sum r_i x f_i(x)}$$

sein ($g = 1, 2, \ldots N$), wo die zwei neuen Integrationskonstanten A und B und die n Koeffizienten der Polynome $f_i(x)$ für die verschiedenen Überlebensgesetze verschieden sein können.[1])

Den schönen Untersuchungen von *Quiquet* kommt nicht nur eine theoretische, sondern auch eine praktische Bedeutung zu. Um uns davon zu überzeugen, brauchen wir nur an die Fälle zu denken, wo gleichzeitig Aktive und Invalide oder Versicherte beider Geschlechter und dergl. in Betracht kommen.

Andererseits erlaubt die große Mannigfaltigkeit der Integrale, die in jedem einzelnen Falle am besten passenden Integralfunktionen zu wählen.

§ 14. **Analytische Ausgleichung: Die Ausgleichung nach der Formel von Gompertz-Makeham.**

51. Es folgt aus den bekannten Ausdrücken

$$l_x = k s^x g^{c^x}$$
$$p_x = s g^{(c-1)c^x}, \tag{a}$$

daß

$$\log p_x = \log s + c^x(c-1)\log g \tag{46}$$
$$\Delta \log p_x = \log p_{x+1} - \log p_x = c^x(c-1)^2 \log g \tag{47}$$
$$\Delta \log p_{x+1} = \log p_{x+2} - \log p_{x+1} = c^{x+1}(c-1)^2 \log g \tag{48}$$
$$\frac{\Delta \log p_{x+1}}{\Delta \log p_x} = c. \tag{49}$$

$\log g$ und g bestimmen wir dadurch, daß wir den dadurch definierten Wert von c in die Gleichung (46) einsetzen; $\log s$ und s werden ebenfalls ganz analog durch die Gleichung (47) geliefert. Damit ist, da k völlig willkürlich ist, der Wert aller Konstanten der Gl. (a) bestimmt. Dieses einfache Verfahren hat aber den Nach-

1) *Quiquet: Sur l'emploi simultané de Lois de survie distinctes* (Verhandlungen des IV. intern. Versicherungskongresses, New-York 1903).

teil, daß der Wert von c, auf welchen sich alles stützt, nur angenähert ist, so daß auch den erhaltenen Werten von g und s Fehler anhaften werden. Da andererseits die Makehamsche Formel nur ein angenäherter Ausdruck einer Überlebenstafel ist, so wird man auch verschiedene Werte von c bekommen, je nach den Altern x, die man in der Gleichung berücksichtigt. Es fragt sich, welcher von diesen Werten c als richtig anzusehen ist.

Eine größere Genauigkeit kann man dadurch erreichen, daß man in der Bestimmung von c nicht ein einziges Alter x, sondern eine Gruppierung von Werten x in Betracht zieht, und daß man den Wert der Konstanten von einer möglichst großen Anzahl von Beobachtungen abhängen läßt.

Das Verfahren, dem man in der Ausgleichung der Tafel von normalen Risiken der 20 englischen Gesellschaften folgte, ist dieses:

Ist $p(x, x+t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß (x) das Alter $x+t$ erreiche, so ist offenbar

$$\log p(x, x+t) = t \log s + c^x(c^t - 1) \log g$$

$$\sum_x^{x+t-1} \log p(x, x+t)$$

$$= t \log s + (c^t - 1)\{c^x + c^{x+1} + \cdots + c^{x+t-1}\} \log g$$

$$= t \log s + \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^x \log g = u_x$$

$$\sum_{x+t}^{x+2t-1} \log p(x, x+t) = t \log s + \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^{x+t} \log g = u_{x+t}$$

$$\sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log p(x, x+t) = t \log s + \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^{x+2t} \log g = u_{x+2t}$$

$$\Delta u_x = u_{x+t} - u_x = \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^x \log g$$

$$\Delta u_{x+t} = u_{x+2t} - u_{x+t} = \frac{(c^t-1)^2}{c-1} c^{x+t} \log g$$

$$\frac{\Delta u_{x+t}}{\Delta u_x} = c^t,$$

woraus endlich folgt:

$$\frac{\log \Delta u_{x+t} - \log \Delta u_x}{t} = \log c.$$

Die Werte $x = 17$ und $t = 18$ haben sich als die zweckmäßigsten erwiesen; es sind also alle Alter von 17 bis 88 mit in die Rechnung aufgenommen worden. Indessen hat man nicht direkt die Werte p_x oder $\log p_x$ ausgeglichen, sondern die Anzahl der Lebenden l_x. Dies macht betreffs der Rechnung keinen wesentlichen Unterschied, und man findet genau wie vorhin:

$$\frac{\log \{\Delta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x\} - \log \{\Delta^2 \sum_x^{x+t-1} \log l_x\}}{t} = \log c,$$

wo die zweiten Differenzen $\Delta^2 \sum^t \log l_x$ die ersten Differenzen $\Delta \sum \log p_x$ der vorhergehenden Gleichung ersetzen.

Man findet für die genannte Tafel:

Alter	$\sum \log l_x$	Δ	Δ^2	$\log(-\Delta^2)$
17 bis 34	71 · 39993			
35 bis 52	70 · 13553	— 1 · 26440		
53 bis 70	67 · 23052	— 2 · 90501	— 1 · 64061	· 2150054
71 bis 88	55 · 83705	— 11 · 39347	— 8 · 48846	· 9288289
				18 log c = · 7138235
				log c = · 03965686
				c = 1 · 095612

52. Wie c lassen sich aus den übrigen Gleichungen die anderen Konstanten bestimmen. Man findet:

$$\log g = 0 \cdot 09995432 - 1$$

$$\log s = 0 \cdot 997310673 - 1$$

und für die unwesentliche Konstante k

$$\log k = 4 \cdot 0404723.$$

Aus den vier numerischen Werten erhält man für das Ausgangsalter 10:

$$\log l_{10} = \log k - 10(-\log s) - c^{10}(-\log g) = 4 \cdot 0124407$$

$$l_{10} = 10290 \cdot 6.$$

Man hat, falls man mit den unausgeglichenen Werten von $\log l_x$ vergleicht:

Alter	Ausgeglichene Werte von $\log l_x$	Unausgeglichene Werte von $\log l_x$	Differenzen
10	4 · 0124407	4 · 0000000	+ · 0124407
15	3 · 9983352	3 · 99149	+ · 00684
20	3 · 9838486	3 · 98297	+ · 00087
30	3 · 9527227	3 · 95363	— · 00091
40	3 · 9152816	3 · 91503	+ · 00025
50	3 · 8620995	3 · 86179	+ · 00030
60	3 · 7696892	3 · 77069	— · 00101
70	3 · 5795189	3 · 57894	+ · 00057
80	3 · 1457219	3 · 14362	+ · 00210
90	2 · 1047799	2 · 17687	— · 07210
93	1 · 5629818	1 · 64105	— · 07807
94	1 · 3473277	1 · 16392	+ · 18340
95	1 · 1113116	1 · 16392	— · 05261
96	0 · 8529867	1 · 01779	— · 16481

53. Das hier geschilderte Verfahren ist zwar begrifflich sehr einfach, hat aber den großen Nachteil, die Bestimmung von g und s von einem Näherungswerte von c abhängig zu machen, so daß die Werte der beiden Konstanten in noch größerem Maßstabe von der Wirklichkeit abweichen als c selbst und keineswegs der Bedingung genügt wird, die Summe der absoluten Beträge oder der Quadrate der Fehler zu einem Minimum zu machen.

Man kann, um zu besseren Resultaten zu gelangen, entweder die Werte von c, g und s, die man für verschiedene Alter bestimmt hat, so verbessern, daß die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum gemacht wird, oder man kann, um von vornherein mit starken Näherungen in die Rechnung einzutreten, einen Näherungswert von c nach dem vorherigen Verfahren bestimmen und dann die Werte von g und s nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln.

Letzterer Weg ist z. B. von *Graf* bei einer Ausgleichung der Tafel französischer Gesellschaften eingeschlagen worden, deren Resultate er in den *Mitteilungen des österr.-ungar. Verbandes der Privatversicherungsanstalten* (1904) veröffentlichte. Er findet seine Begründung darin, daß die Konstante c nur innerhalb sehr geringer Grenzen variiert, da bereits kleine Änderungen derselben bedeutende und der Erfahrung widersprechende Änderungen von p_x hervorrufen würden.

54. Nach Gleichung (46) ist:

$$\log p_x = \log s + c^x(c-1)\log g = A + Bc^x.$$

Bezeichnen wir mit Γ_x das Gewicht von $\log p_x$, so lautet die von den Konstanten der Makehamschen Formel zu erfüllende Bedingung:

$$[\Gamma_x(\log p_x - A - Bc^x)^2] = \text{Minimum},$$

oder falls wir $A = A_0 + \alpha$, $B = B_0 + \beta$, $c = c_0 + \gamma$ setzen,

$$[\Gamma_x(\log p_x - A_0 - B_0 c_1^x - \alpha - \beta c_0^x - \gamma B_0 x c_0^{x-1})^2] = \text{Minimum}.$$

Es handelt sich darum, α, β, γ zu bestimmen. Führt man zur Abkürzung

$$\log p_x - A_0 - B_0 c_0^x = u_x \quad \text{und} \quad \frac{\gamma B_0}{c_0} = \delta$$

ein, und setzt die ersten Ableitungen der Gleichung nach α, β, γ gleich Null, so erhält man die drei Bedingungsgleichungen:

$$\alpha[\Gamma_x] + \beta[\Gamma_x c_0^x] + \delta[\Gamma_x x c_0^x] = [\Gamma_x u_x]$$
$$\alpha[\Gamma_x c_0^x] + \beta[\Gamma_x c_0^{2x}] + \delta[\Gamma_x x c_0^{2x}] = [\Gamma_x c_0^x u_x]$$
$$\alpha[\Gamma_x x c_0^x] + \beta[\Gamma_x x c_0^{2x}] + \delta[\Gamma_x x^2 c_0^{2x}] = [\Gamma_x x c_0^x u_x].$$

Es sind dies drei lineare Gleichungen für die drei Unbekannten. Dabei hat die Klammer [. . .] die in Kap. I, § 5 definierte Bedeutung, und es ist

$$\Gamma_x = \frac{l_x p_x}{q_x} \tag{50}$$

zu setzen. Gleichung (50) folgt aus dem Satze von Wittstein: „Ist π_x das Gewicht zur Bestimmung des Wertes p_x, so ist das Gewicht P für $f(p_x)$ durch

$$P_x = \frac{\pi_x}{\left(\frac{df(p_x)}{dx}\right)^2}$$

gegeben."

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach.

Nehmen wir an, daß p_x der wahrscheinlichste, p_m der beobachtete Wert der unbekannten Größe p_x ist, und daß

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(p_x-p_m)^2} dp_x$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers des Intervalls $(p_x - p_m,\ p_x - p_m + dp_x)$ ausdrückt. $f(p_x)$ und $f(p_m)$ bezeichnen den wahr-

scheinlichsten, bzw. den beobachteten Wert der Funktion $f(p_x)$. Ist dann

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 f((p_x)-f(p_m))^2} df(p_x)$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers des Intervalls $\{f(p_x) - f(p_m), f(p_x) - f(p_m) + df(p_x)\}$, so gilt offenbar die Gleichung identisch:

$$He^{-H^2 \{f(p_x)-f(p_m)\}^2} df(p_x) = h e^{-h^2 \{p_x - p_m\}^2} dp_x.$$

Aus ihr folgt aber in erster Annäherung:

$$H = \frac{h}{\frac{df(p_x)}{dp_x}} \quad \text{d. h.} \quad P_x = \frac{\pi_x}{\left(\frac{df(p_x)}{dp_x}\right)^2},$$

wie behauptet wurde.

Beachtet man, daß $\frac{1}{\sqrt{l_a p_a q_a}}$ das Gewicht zur Bestimmung von l_a ist, so liefert die Anwendung des bewiesenen Satzes

$$\frac{l_a}{p_a q_a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{l_a p_a}{q_a}$$

als Ausdruck der zu p_a bzw. zu $\log p_a$ gehörigen Gewichte. Es ist also allgemein

$$\Gamma_x = \frac{l_x p_x}{q_x}.$$

55. Herr *Blaschke* illustriert ziffermäßig die Wirkung der Methode, indem er sie auf die Tafel der 20 englischen Gesellschaften anwendet und die nach der *King*schen Methode ermittelten und vorher mitgeteilten Näherungswerte von $\log c$, $\log s$ und $\log g$ zugrunde legt. Er findet — von den dadurch definitiven Näherungswerten

$$c_0 = 1{,}0956122$$
$$A_0 = 0{,}997310673$$
$$B_0 = 0{,}9999563244 - 1$$

ausgehend — die Ergänzungen:

$$\alpha = -\ 0{,}000108618$$
$$\beta = 0{,}00000529261$$
$$\gamma = 0{,}00182731.$$

In der nachfolgenden Tabelle teilt er zum Vergleiche die Rohzahlen, die Ausgleichswerte nach *King*, und die definierten Werte

für einen Teil der zwischen den Altern 17 und 83 behandelten Absterbeordnung mit.[1])

Alter	Lebende	Tote	unausgeglichen	ausgeglichen nach King	definitive Ausgleichung
35	35818,5	265	0,00824	0,00862	0,00869
36	36840,5	326	0,00885	0,00885	0,00891
37	37360	357	0,00956	0,00910	0,00916
38	37804,5	389	0,01029	0,00937	0,00942
39	38112,5	405	0,01063	0,00969	0,00972
40	38195	377	0,00987	0,01001	0,01003
41	37838	396	0,01047	0,01038	0,01039
42	37258,5	399	0,01071	0,01081	0,01077
43	36534,5	387	0,01059	0,01122	0,01120
44	35693	421	0,01180	0,01172	0,01160
45	34735,5	429	0,01235	0,01224	0,01217
46	33660,5	421	0,01251	0,01281	0,01273
47	32502	460	0,01415	0,01345	0,01334
48	31228	440	0,01409	0,01415	0,01401
49	30055,5	459	0,01527	0,01490	0,01475
50	28855,5	476	0,01650	0,01572	0,01555
51	27510,5	479	0,01741	0,01665	0,01644
52	26208,5	446	0,01702	0,01764	0,01741

Sind α, β, γ nicht genügend klein, so wird auch das Verfahren ein oder mehrere Male wiederholt werden müssen.

In dem vorhin erwähnten Falle, wo man c unverändert läßt, reduziert sich das System der Bedingungsgleichungen auf

$$[\Gamma_x \log p_x] = A[\Gamma_x] + B[c^x \Gamma_x]$$
$$[\Gamma_x (\log p^x) c^x] = A[\Gamma_x c^x] + B[c^{2x} \Gamma_x].$$

Aus ihm lassen sich A und B bestimmen. Diese Methode erfordert natürlich eine weit geringere Arbeit, als die vorhergehende.

§ 15. **Die mechanische Ausgleichung.**

56. Allen mechanischen Ausgleichungsmethoden ist es gemeinsam, daß der ausgeglichene Wert u_x' von u_x als ganze Funktion von u_x und von einer gleichen Anzahl von Nachbarwerten zu beiden Seiten desselben bestimmt wird, und zwar derart, daß die gleichweit vom Mittelwert u_x abstehenden Werte u_{x-u} und u_{x+u} mit denselben Koeffizienten auftreten.

1) Vgl. *Blaschke, Vorl. über mathem. Statistik,* Leipzig 1906, Seiten 200 und 201.

Die allgemeine Ausgleichungsformel ist also

$$u_x' = p_0 u_x + p_1(u_{x+1} + u_{x-1}) + p_2(u_{x+2} + u_{x-2}) + \cdots,$$

in der das System der Koeffizienten an die Bedingung geknüpft ist:

$$p_0 + 2(p + p_2 + \cdots) = 1.$$

Ihr liegt zugrunde die fundamentale Annahme der Methode der kleinsten Quadrate, daß das arithmetische Mittel der Einzelwerte am besten den wahren Wert der unbekannten beobachteten Größen darstellt.

Es handelt sich aber nur um eine angenäherte Verwendung der genannten Methode: während bei der Methode der kleinsten Quadrate die Maximaleigenschaft der gewählten Kurve im Vergleich mit jeder beliebigen anderen Kurve besteht, werden hier nur diejenigen aus Parabeln zusammengesetzten Kurven zum Vergleich zugelassen, die sich in einem bestimmten Bereiche und nach einem bestimmten Prinzip ziehen lassen. Es kommt hinzu, daß die Bestimmung der Gewichte willkürlich ist: die Größe des Gewichts eines bestimmten Beobachtungspunktes wird nur davon abhängig gemacht, wie oft er bei der Bildung von Parabeln mitwirkt.

57. Wohl eine der denkbar einfachsten Ausgleichsmethoden besteht darin, daß man u_x' gleich dem arithmetischen Mittel aus u_x und den vier unmittelbar benachbarten Werten setzt, d. h. daß man annimmt

$$(51)\qquad u_x' = \frac{u_{x-2} + u_{x-1} + u_x + u_{x+1} + u_{x+2}}{5}.$$

Die nochmalige Wiederholung des Verfahrens für die Größen u_x' liefert die neue Reihe ausgeglichener Werte:

$$(52)\quad u_x'' = \frac{u'_{x-2} + u'_{x-1} + u'_x + u'_{x+1} + u'_{x+2}}{5}$$

$$= \frac{1}{25}[u_{x-4} + u_{x+4} + 2(u_{x-3} + u_{x+3}) + 3(u_{x-2} + u_{x+2})$$

$$+ 4(u_{x-1} + u_{x+1}) + 5u_x],$$

bei welcher der ausgeglichene Wert von u_x Funktion von den neun Werten $u_{x-4} \ldots u_x \ldots u_{x+4}$ ist.

Die Formel — die man nach *Finlaison* oder nach *Wittstein* benennt[1]) — läßt eine Reihe von Werten unverändert, bei welcher

$$\Delta^2 u_{x-2} = \Delta u_{x-1} - \Delta u_{x-2} = (u_x - u_{x-1}) - (u_{x-1} - u_{x-2}) = 0$$

d. h.

$$u_{x-1} = \tfrac{1}{2}(u_x + u_{x-2}).$$

Ihre Einfachheit rührt her von der Einfacheit der Annahme betreffs der Funktion u_x.

58. Es werden durch die Punktetripel

$$\begin{matrix} u_{x-7} & u_{x-2} & u_{x+3} \\ u_{x-6} & u_{x-1} & u_{x+4} \\ u_{x-5} & u_x & u_{x+5} \\ u_{x-4} & u_{x+1} & u_{x+6} \\ u_{x-3} & u_{x+2} & u_{x+7} \end{matrix}$$

fünf Parabeln zweiter Ordnung gezogen; *das arithmetische Mittel der Ordinaten ihrer Schnittpunkte mit der Ordinate,* deren Abzisse x ist, nimmt man als ausgeglichenen Wert von u_x an. In der Anwendung des Verfahrens auf die Anzahl l_x der Überlebenden des Alters x besteht die bekannte Ausgleichsmethode von *Woolhouse.*

Die ihr entsprechende Interpolationsformel leitet man sehr leicht ab, indem man

$$y_{-1} = u_{x-5},\quad y_0 = u_x,\quad y_1 = u_{x+5},\quad y_0 - y_{-1} = \Delta y_{-1}$$

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0,\quad \Delta y_0 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_{-1}$$

setzt und berücksichtigt, daß

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2.$$

Man hat unmittelbar

$$y_0 = \alpha,\quad y_{-1} = \alpha - \beta + \gamma,\quad y_1 = \alpha + \beta + \gamma$$

und

$$\Delta y_{-1} = \beta - \gamma,\quad \Delta y_0 = \beta + \gamma,\quad \Delta^2 \gamma_{-1} = 2\gamma$$

$$y = y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}\right)x + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}x^2$$

$$= y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 x_{-1}. \qquad (53)$$

1) *Wittstein, Math. Statistik und deren Anwendung.* Hannover 1867, § 23. Genauer benennt man nach *Finlaison* die zweimal wiederholte *Wittsteinsche* Ausgleichung.

Setzt man in Formel (53) für y_0 bzw. die Werte $u_{x-7}, u_{x-6}, \dots u_{x-3}$ ein, und

$$\Delta y_0 = u_{x-2} - u_{x-7}, \dots, u_{x+2} - u_{x-3}$$
$$\Delta y_1 = u_{x+3} - u_{x-2}, \dots, u_{x+4} - u_{x-3}$$
$$x = 7, 6 \dots 3,$$

so bekommt man entsprechend den fünf dadurch definierten Kurven fünf verschiedene Werte von u_x, deren arithmetische Mittel, wie gesagt, als ausgeglichener Wert u_x' von u_x angenommen wird.

Die tatsächliche Ausführung der Rechnungen liefert, falls man die ersten und zweiten Differenzen durch die entsprechenden Werte der Funktion ersetzt:

$$\begin{aligned} u_x' = \frac{1}{125}[25u_x &+ 24(u_{x-1} + u_{x+1}) + 21(u_{x-2} + u_{x+2}) \\ &+ 7(u_{x-3} + u_{x+3}) + 3(u_{x-4} + u_{x+4}) \\ &- 2(u_{x-6} + u_{x+6}) - 3(u_{x-7} + u_{x+7})] \\ &= \frac{1}{5}[u_x + 0{,}96(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}84(u_{x-2} + u_{x+2}) \\ &+ 0{,}28(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}12(u_{x-4} + u_{x+4}) \\ &- 0{,}08(u_{x-6} + u_{x+6}) - 0{,}12(u_{x+7} + u_{x-7})]. \end{aligned} \quad (54)$$

Die Methode wird äußerst häufig angewendet; sie gilt ebensogut für Überlebensfunktion, wie für Sterbenswahrscheinlichkeit.

Formel (54) läßt sich mit Vorteil in die folgende transformieren.

Man setze

$${}_k\sigma_5 = u_{x+k} + u_{x+k+1} + u_{x+k-1} + u_{x+k+2} + u_{x+k-2},$$

also

$${}_0\sigma_5 = u_x + u_{x+1} + u_{x-1} + u_{x+2} + u_{x-2}$$
$$\begin{aligned} {}_0\sigma_{5,5} &= {}_0\sigma_5 + {}_1\sigma_5 + {}_{-1}\sigma_5 + {}_2\sigma_5 + {}_{-2}\sigma_5 \\ &= 5u_x + 4(u_{x+1} + u_{x-1}) + 3(u_{x+2} + u_{x-2}) \\ &+ 2(u_{x+3} + u_{x-3}) + (u_{x+4} + u_{x-4}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} {}_0\sigma_{5,5,5} &= {}_0\sigma_{5,5} + {}_1\sigma_{5,5} + {}_{-1}\sigma_{5,5} + {}_2\sigma_{5,5} + {}_{-2}\sigma_{5,5} \\ &= 19u_x + 18(u_{x+1} + u_{x-1}) + 15(u_{x+2} + u_{x-2}) \\ &+ 10(u_{x+3} + u_{x-3}) + 6(u_{x+4} + u_{x-4}) \\ &+ 3(u_{x+5} + u_{x-5}) + (u_{x+6} + u_{x-6}). \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, daß sich u_x' mittels der zweimal iterierten Funktion ${}_k\sigma_{5,5,5}$ in der Form ausdrücken läßt:

$$u_x' = \frac{1}{125}[10 \cdot {}_0\sigma_{5,5,5} - 3({}_{-1}\sigma_{5,5,5} + {}_0\sigma_{5,5,5} + {}_1\sigma_{5,5,5})].$$

59. Bezeichnen wir mit $c_i (i = -7, -6, \dots -1, 0, 1, \dots 7)$ den Koeffizienten von $u_{x \pm i}$ in der Formel (54), so hat man die leicht zu kontrollierenden Identitäten

$$\sum c_i = 1, \quad \sum i c_i = 0, \quad \sum i^2 c_i = 0$$
$$\sum i^3 c_i = 0.$$

Es zeigt sich also, daß Woolhouses Formel nicht nur eine Reihe zweiter, sondern selbst eine Reihe dritter Ordnung unverändert läßt. Daß es sich nicht um eine zufällige Folge der Interpolationsmethode handelt, beweist folgender Satz:

„Gilt die Interpolationsformel

$$u_n = a_1(u_{n+1} + u_{n-1}) + a_2(u_{n+2} + u_{n-2}) + \dots + a_p(u_{n+p} + u_{n-p})$$
$$(2a_1 + 2a_2 + \dots 2a_p = 1)$$

identisch in n für eine Reihe zweiter Ordnung, so ist sie auch gültig für eine arithmetische Reihe dritter Ordnung.“[1])

Man hat nämlich allgemein, falls $u_{n+1} - u_n = \Delta u_n, \dots$:

$$u_{n \pm p} = u_n \pm p\Delta u_n + \frac{p(p \mp 1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_n \pm \frac{p(p \mp 1)(p \mp 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 u_n \dots$$

also auch, falls die Reihe von dritter Ordnung ist:

$$u_{n+p} + u_{n-p} = 2u_n + p^2(\Delta^2 u_n - \Delta^3 u_n).$$

Die Interpolationsformel wird, falls wir für $u_{n+p} + u_{n-p}$ den Wert einsetzen:

$$\begin{aligned} u_n &= 2u_n(a_1 + a_2 + \dots + a_p) \\ &+ (a_1 + 2^2 a_2 + \dots + p^2 a_p)(\Delta^2 u_n - \Delta^3 u_n) \\ &= u_n + (a_1 + 2^2 a_2 + \dots p^2 a_p)(\Delta^2 u_n - \Delta^3 u_n). \end{aligned}$$

1) Allgemeiner: Eine Ausgleichungsgleichung, die für eine Parabel $2n$-ter Ordnung gilt, gilt auch immer für eine Parabel $\overline{2n+1}$-ter Ordnung. Vgl. *Die Methoden der Ausgleichung* usw. von *Blaschke*, Wien 1893, S. 66 und 87, und *Landré, Die Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums* in Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch XXII, zweiter Teil, S. 38—40.

Soll die Gleichung für jedes Glied gelten, so müssen die a der Relation genügen

$$1^2a_1 + 2^2a^2 + \cdots + p^2a_p = 0.$$

Damit ist aber die Aussage bewiesen.

Die Interpolation mittels Parabeln dritter Ordnung, welche den eben formulierten Satz auszuschließen scheint, kann aber dazu dienen, den Parabelbögen zweiter Ordnung, die man durch die Punktetripel u_{i-1}, u_i, u_{i+1} zieht, eine neue Bedingung aufzuerlegen, die eine größere Regelmäßigkeit in der Ausgleichung zu erreichen gestattet. Auf einen solchen Gedanken gründet sich die *Karup*sche Methode. Die fortgesetzte Anwendung der Woolhouseschen Interpolation führt zu Parabelbögen, die dort, wo sie zusammenstoßen, Ecken bilden, welchen Unregelmäßigkeiten in der ausgeglichenen Zahlenreihe entsprechen: um diese zu vermeiden, werden in der Karupschen *oskulierenden* Ausgleichsmethode[1]) die dritten Differenzen einbezogen, so daß die Parabelbögen dort, wo sie zusammenstoßen, eine Berührung erster Ordnung besitzen.

Man verlangt, daß die durch die Punkte u_x und u_{x+5} hindurchgehende Parabel im Punkte u_x dieselbe Tangente hat, wie die Parabel durch die Punkte u_{x-5}, u_x und u_{x+5} und im Punkte u_{x+5} dieselbe Tangente besitzt, wie die Parabel, welche durch die Punkte u_x, u_{x+5} und u_{x+10} hindurchgeht; es sind im ganzen vier Bedingungen, denen vier Konstante in der interpolierenden Gleichung entsprechen werden. Letztere wird also lauten:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3. \qquad (55)$$

Aus

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2$$

folgt, daß die Tangenten in den Punkten u_x und u_{x+5} bzw. gleich B und $B + 10C + 75D$ sind.

Es ist aber auch, falls

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \quad u_x = \alpha \qquad (56)$$

angenommen wird,

$$u_{x-5} = u_x - 5\beta + 25\gamma$$
$$u_{x+5} = u_x + 5\beta + 25\gamma.$$

1) *Über eine neue Ausgleichsmethode* in „Transactions of the second intern. act. Congress". London 1898, Seite 31 ff.

Daher:

$$\beta = \frac{u_{x+5} - u_{x-5}}{10}$$

sowie wegen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \beta:$$
$$B = \beta.$$

Ersetzt man in der Gleichung (55) u_{x-5}, u_x und u_{x+5} bzw. durch u_x, u_{x+5} und u_{x+10}, so hat man

$$\frac{u_{x+10} - u_x}{10}$$

als Tangentenrichtung im Punkte u_{x+5}. Es ist also

$$B = \frac{u_{x+5} - u_{x-5}}{10}$$

$$B + 10C + 75D = \frac{u_{x+10} - u_x}{10},$$

so daß

$$10C + 75D = \frac{u_{x+10} - u_{x+5} - u_x + u_{x-5}}{10}. \qquad (57)$$

Analog werden wir aus der Gleichung

$$u_{x+5} = u_x + 5B + 25C + 125D$$

die neue Relation

$$\frac{u_{x+5} - 2u_x + u_{x-5}}{50} = C + 5D$$

ableiten, die mit der Gleichung (57) die Werte von C und D liefert:

$$C = \frac{-u_{x+10} + 4u_{x+5} - 5u_x + 2u_{x-5}}{50}$$

$$D = \frac{u_{x+10} - 3u_{x+5} + 3u_x - u_{x-5}}{250}.$$

Daraus, und aus

$$A = u_x, \quad B = \frac{u_{x+5} - u_{x-5}}{10}$$

folgt als Gleichung der Kurve

$$y = u_x + \frac{u_{x+5} + u_{x-5}}{10}x + \frac{-u_{x+10} + 4u_{x+5} - 5u_x + 2u_{x-5}}{50}x^2$$
$$+ \frac{u_{x+10} - 3u_{x+5} + 3u_x - u_{x-5}}{250}x^3.$$

Setzen wir zur Abkürzung $u_x = u_0$, $u_{x \pm k_5} = u_{\pm k_5}$, $y = u_x$, so werden wir schreiben können:

$$u_x = u_0 + \frac{u_{+5} - u_{-5}}{10} x + \frac{-u_{10} + 4u_5 - 5u_0 + 2u_{-5}}{50} x^2 + \frac{u_{10} - 3u_5 + 3u_0 - u_{-5}}{250} x^3$$

oder:

$$250 u_x = -x(x-5)^2 u_{-5} + (3x^3 - 25x^2 + 250) u_0 + (25x + 20x^2 - 3x^3) u_{+5} + (x^3 - 5x^2) u_{10}.$$

Setzt man der Reihe nach für u_x die Werte u_x, u_{x-1}, u_{x-2}, u_{x-3}, u_{x-4} ein, d. h. für x die Werte 0, 1, 2, 3, 4, so bekommt man:

$$\begin{aligned} 250u_x &= 250u_x \\ 250u_x &= -16x_{x-6} + 228u_{x-1} + 42u_{x+4} - 42u_{x+9} \\ 250u_x &= -18u_{x-7} + 174u_{x-2} + 106u_{x+3} - 12u_{x+8} \\ 250u_x &= -12u_{x-8} + 106u_{x-3} + 174u_{x+2} - 18u_{x+7} \\ 250u_x &= -4u_{x-9} + 42u_{x-4} + 228u_{x+1} - 16u_{x+6}. \end{aligned}$$

Nimmt man nun als korrigierten Wert u_x' für u_x den mittleren Wert aus den obenstehenden Ausdrücken, und dividiert man durch 1250, so bekommt man die Karupsche Endformel:

$$\begin{aligned} u_x' = {} & 0{,}2u_x + 0{,}1824(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}1392(u_{x-2} + u_{x+2}) \\ & + 0{,}0848(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}0336(u_{x-4} + u_{x+4}) \\ & - 0{,}0128(u_{x-6} + u_{x+6}) - 0{,}0144(u_{x-7} + u_{x+7}) \\ & - 0{,}0096(u_{x-8} + u_{x+8}) - 0{,}0032(u_{x-9} + u_{x+9}). \end{aligned} \qquad (58)$$

Die Wiedereinführung der *Ackland*schen iterierten Funktionen ${}_k\sigma_{5,5,5}$ erlaubt die Transformation der Gleichung (58) in die weit einfachere:

$$u_x' = 0{,}0048({}_{-1}\sigma_{5,5,5} + {}_0\sigma_{555} + {}_1\sigma_{5,5,5}) - 0{,}0032({}_{-3}\sigma_{5,5,5} + {}_3\sigma_{5,5,5}).$$

60. Der Punkt u_0 sei in den Koordinatenanfangspunkt verlegt; wir verlangen von der Parabel fünfter Ordnung

$$y = u_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5, \qquad (59)$$

welche außer durch u_0 durch u_1 hindurchgeht, daß sie in den beiden Punkten eine Berührung zweiter Ordnung mit der durch

die Punkte u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2 definierten Parabel vierter Ordnung besitzt. Die Gleichung dieser letzteren lautet:

$$y = u_{-2} + \frac{x+2}{1!}\Delta u_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)}{2!}\Delta^2 u_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)x}{3!}\Delta^3 u_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{4!}\Delta^4 u_{-2}.$$

Es soll also sein:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \Delta u_{-2} + \frac{3}{2}\Delta^2 u_{-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 u_{-2} - \frac{1}{12}\Delta^4 u_{-2} = a$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = \Delta^2 u_{-2} + \Delta^3 u_{-2} - \frac{1}{12}\Delta^4 u_{-2} = 2b,$$

zu welchen Bedingungen noch die dritte hinzukommt (falls $\Delta u = 1$):

$$u_1 = u_0 + a + b + c + d + e.$$

Über zwei der Koeffizienten der Gleichung (59), die noch willkürlich bleiben, verfügen wir, indem wir verlangen, daß unsere Parabel im Punkte u_1 eine Berührung zweiter Ordnung mit der durch die Punkte u_{-1}, u_0, u_1, u_2, u_3 bestimmten Parabel besitzt, deren Gleichung offenbar

$$y = u_{-1} + \frac{x+1}{1!}\Delta u_{-1} + \frac{(x+1)}{2!}\Delta^2 u_{-1} + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\Delta^3 u_{-1} + \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}\Delta^4 u_{-1}$$

ist. Mit dieser Parabel ist die andere identisch:

$$y = u_{-1} + \frac{x+2}{1!}\Delta + \frac{(x+2)(x+1)x}{2!}\Delta^2 + \frac{(x+2)(x+1)x}{3!}\Delta^3 + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{4!}\Delta^4,$$

(wobei wir der Kürze halber

$$\Delta^i = \Delta^i u_{-2}$$

geschrieben haben), und unsere Bedingungen werden lauten:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = a + 2b + 3c + 4d + 5e = \Delta + \frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{11}{6}\Delta^3 + \frac{1}{4}\Delta^4 - \frac{1}{12}\Delta^5$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 2b + 6c + 12d + 20e = \Delta^2 + 2\Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{1}{12}\Delta^5.$$

Man bekommt, indem man die fünf Bedingungsgleichungen nach den fünf zu bestimmenden Konstanten auflöst:

$$\begin{aligned}
a &= \Delta + \tfrac{3}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \tfrac{1}{12}\Delta^4 \\
b &= \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{2}\Delta^3 - \tfrac{1}{24}\Delta^4 \\
c &= \tfrac{1}{6}\Delta^3 + \tfrac{1}{12}\Delta^4 + \tfrac{7}{24}\Delta^5 \\
d &= \tfrac{1}{24}\Delta^4 - \tfrac{1}{2}\Delta^5 \\
e &= \tfrac{5}{24}\Delta^5.
\end{aligned}$$

Gleichung (59) lautet somit:

$$y = u_0 + \left(\Delta + \tfrac{3}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \tfrac{1}{2}\Delta^4\right)x + \left(\tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{2}\Delta^3 - \tfrac{1}{24}\Delta^4\right)x^2$$
$$+ \left(\tfrac{1}{6}\Delta^3 + \tfrac{1}{12}\Delta^4 + \tfrac{7}{24}\Delta^5\right)x^3 + \left(\tfrac{1}{24}\Delta^4 - \tfrac{1}{2}\Delta^5\right)x^4 + \tfrac{5}{24}\Delta^5.$$

Durch unsere Grundgleichung definieren wir fünf Parabeln dadurch, daß wir den Werten u_0 und u_1 der Reihe nach die beobachteten Werte in den Punkten 10 und 15, 11 und 16, 12 und 17, 13 und 18, 14 und 19 beilegen: praktisch zwar läßt man jede dieser Parabeln immer nur durch einen Punkt hindurchgehen, welcher für die erste dem Werte $x = \frac{2}{5}$, für die zweite dem Werte $x = \frac{1}{5}, \ldots$, für die fünfte dem Werte $x = -\frac{2}{5}$ entspricht.

Dem arithmetischen Mittel der auf solche Art fünffach berechneten Werte entspricht die *Sprague*sche Ausgleichsformel:[1])

$$\begin{aligned}
u_x' = 0{,}2\,u_x &+ 0{,}18688\,(u_{x+1} + u_{x-1}) + 0{,}14528\,(u_{x+2} + u_{x-2}) \\
&+ 0{,}01768\,(u_{x+3} + u_{x-3}) + 0{,}03488\,(u_{x+4} + u_{x-4}) \\
&- 0{,}01952\,(u_{x+6} + u_{x-6}) - 0{,}02272\,(u_{x+7} + u_{x-7}) \\
&- 0{,}01472\,(u_{x+8} + u_{x-8}) - 0{,}00512\,(u_{x+9} + u_{x-9}) \\
&+ 0{,}00256\,(u_{x+11} + u_{x-11}) + 0{,}00288\,(u_{x+12} + u_{x-12}) \\
&+ 0{,}00160\,(u_{x+13} + u_{x-13}) + 0{,}00032\,(u_{x+14} + u_{x-14}).
\end{aligned}$$

1) *Explanation of a new formula for Interpolation*, Journ. of the Inst. of Act. XXII.

61. Das *Higham*sche Ausgleichungsverfahren[1]) (welches als besonderen Fall das vorhin erwähnte Wittstein-Finlaisonsche Verfahren enthält) gründet sich auf die Möglichkeit, eine gegebene Zahlenreihe korrekt bis auf die zweiten und die dritten Differenzen in eine neue zu transformieren, die man aus der ersten durch Addition von p aufeinander folgenden Gliedern und Division durch p, durch Addition von q Gliedern der neuen Reihe und Division durch q, durch Addition von r Gliedern der neuen Reihe und Division durch r, und so weiter gebildet hat. Es seien

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots$$

die Glieder der ursprünglichen Reihe, und

$$\begin{aligned}
\sigma_p u_0 &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1} \\
\sigma_{p,q} u_0 &= \sigma_p u_0 + \sigma_p u_1 + \cdots \sigma_p u_{q-1} \\
\sigma_{p,q,r} u_0 &= \sigma_{p,q} u_0 + \sigma_{p,q} u_1 + \cdots \sigma_{p,q} u_{r-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Man findet leicht, daß, falls

$$u_1 - u_0 = \Delta u_0, \quad u_2 - u_1 = \Delta u_1, \quad \Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0 \ldots$$

ist, und der Exponent von Δ in der Binomialentwicklung

$$(1 + \Delta)^n$$

als der Ordnungsindex der Differenz betrachtet wird, die symbolischen Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
\sigma_p u_0 &= u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \\
\sigma_{p,q} u_0 &= u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta} \\
\sigma_{p,q,r} u_0 &= u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^r - 1}{\Delta} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Relationen mit den Entwicklungen der Ausdrücke

$$p \cdot u_0 (1 + \Delta)^{\frac{p-1}{2}}, \quad q \cdot u_0 (1 + \Delta)^{\frac{q-1}{2}}, \quad r \cdot u_0 (1 + \Delta)^{\frac{r-1}{2}}$$

$$(1 + \Delta)^{\frac{p+q-2}{2}}$$

1) *On the graduation of mortality tables*, Ibidem XXV.

führt zur Gleichung:

$$u_0 \cdot \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta} = p \cdot q \cdot u_0 \Big[(1+\Delta)^{\frac{p+q-2}{2}}$$
$$+ \frac{p^2+q^2-2}{2\cdot 3\cdot 4}\Delta^2 + \frac{(p^2+q^2-2)(p+q-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2}\Delta^3 + \cdots\Big]$$
$$= M u_0 \Big[(1+\Delta)^{\frac{A-2}{2}} + \frac{B-2}{2\cdot 3\cdot 4}\Delta^2$$
$$+ \frac{(B-2)(A-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2}\Delta^3 + \cdots\Big],$$

wobei

$$M = p\cdot q, \quad A = p + q, \quad B = p^2 + q^2.$$

Man findet ferner, indem man die Definition von M, A, B analog ändert, und

$$M = pqr, \quad A = p + q + r, \quad B = p^2 + q^2 + r^2$$

setzt, daß

$$\sigma_{p,q,r} u_0 = u_0 \frac{(1+\Delta)^p - 1}{\Delta}\,\frac{(1+\Delta)^q - 1}{\Delta}\,\frac{(1+\Delta)^r - 1}{\Delta}$$
$$= M u_0 \Big[(1+\Delta)^{\frac{A-3}{2}} + \frac{B-3}{2\cdot 3\cdot 4}\Delta^2 + \frac{(B-3)(A-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2}\Delta^3 + \cdots\Big].$$

Daß allgemein

$$\sigma_{p,q,r}\ldots u_0 = M u_0 \Big[(1+\Delta)^{\frac{A-n}{2}} + \frac{B-n}{2\cdot 3\cdot 4}\Big(\Delta^2 + \frac{A-\overline{n+2}}{2}\Delta^3\Big) + \cdots\Big]$$

ist, wo natürlich die Definition der Größen M, A, B entsprechend geändert worden ist, beweist man durch den Schluß der vollständigen Induktion.

Man findet, indem man die vierten und höheren Differenzen vernachlässigt und die Identität

$$u_{\frac{A-n}{2}} = u_0(1+\Delta)^{\frac{A-n}{2}}.$$

berücksichtigt, daß

$$u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{\sigma_{p,q,r\ldots}}{M} - \frac{B-n}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot u_0\Big(\Delta^2 + \frac{A-\overline{n+2}}{2}\Delta^3\Big),$$

womit eben die ursprüngliche Aussage bewiesen ist.

Setzt man einfach

$$u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{\sigma_{p,q,r\ldots}}{p\cdot q\cdot r\ldots}, \qquad (60)$$

so begeht man einen Fehler, der positiv oder negativ ist, je nachdem

$$\Delta^2 + \frac{A-\overline{n+2}}{2}\Delta^3 \lesseqgtr 0.$$

Die Sterblichkeitskurven sind Zahlenreihen, für welche Δ^2 und Δ^3, also auch $\Delta^2 + \frac{A-\overline{n+2}}{2}\Delta^3$ stets dasselbe Zeichen tragen, so daß der ausgeglichene Wert gegenüber dem ursprünglichen Wert von jeder neuen Summierung im selben Sinne modifiziert wird. Dies wird z. B. für die *Wittstein-Finlaison*sche Formel gelten, welche dem Falle $n = 2$, $p = q = 5$ entspricht. *Higham* versucht den durch die Gleichung (60) in die Rechnung getragenen Fehler dadurch zu korrigieren, daß er

$$A - n = A' - n'$$

annimmt und

$$u_{\frac{A-n}{2}} = u_{\frac{A'-n}{2}}$$

durch die zwei verschiedenen Summationen $\sigma_{p,q,r,\ldots}$, $\sigma'_{p',q',r',\ldots}$ ausdrückt. Man hat

$$u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{\sigma_{p,q,r,\ldots}}{M} - \frac{B-n}{2\cdot 3\cdot 4} u_0\Big(\Delta^2 + \frac{A-\overline{n+2}}{2}\Delta^3\Big)$$
$$u_{\frac{A'-n'}{2}} = \frac{\sigma'_{p',q',r',\ldots}}{M'} - \frac{B'-n'}{2\cdot 3\cdot 4} u_0\Big(\Delta^2 + \frac{A'-\overline{n'+2}}{2}\Delta^3\Big)$$

oder, durch Auflösung der zweiten Gleichung nach

$$\Delta^2 + \frac{A'-\overline{n'+2}}{2}\Delta^3$$

und Einsetzung des erhaltenen Wertes in die erste:

$$u_{\frac{A-n}{2}} = \frac{\frac{\sigma_{p,q,r\ldots}}{M}(B'-n') - \frac{\sigma'_{p',q',r',\ldots}}{M'}(B-n)}{B'-B-(n'-n)}. \qquad (60')$$

Besondere Fälle der Gleichung (60′) sind z. B. die Ausgleichungsformeln

$$u_8 = \frac{64\sigma_{5,5,5,5}}{10 \cdot 000} - \frac{4\sigma_{5,5,9}}{300} = 0 \cdot 2106 u_0 + 0 \cdot 192(u_1 + u_{-1})$$
$$+ 0{,}14186(u_2 + u_{-2}) + 0{,}07946(u_3 + u_{-3})$$
$$+ 0{,}024(u_4 + u_{-4}) - 0{,}0053(u_5 + u_{-5}) - 0{,}016(u_6 + u_{-6})$$
$$- 0{,}0144(u_7 + u_{-7}) - 0{,}00693(u_8 + u_{-8})$$
$$u_3 = \frac{7\sigma_{4,4} - 10\sigma_7}{42} = \frac{18u_0 + 11(u_1 + u_{-1}) + 4(u_2 + u_{-2}) + 3(u_3 + u_{-2})}{42}$$

und unendlich viele andere Formeln, welche, wie die Gleichung (60′), korrekt bis in die vierte Differenz sind.[1])

62. Setzt man die mittleren Fehler der beobachteten Werte $u_{x-n} \cdots u_x \cdots u_{x+n}$ gleich der Einheit, so ist

$$\sqrt{p_0^2 + 2p_1^2 + 2p_2^2 + \cdots + 2p_n^2}$$

derjenige von u_x' in der allgemeinen Ausgleichsformel

$$u_x' = p_0 u_x + p_1(u_{x+1} + u_{x-1}) + \cdots p_n(u_{x+n} + u_{x-n}).$$

Landré nimmt ihn als Maß der *Abrundungskraft* der Ausgleichsformel an, und von der Betrachtung ausgehend, daß bei der Gleichheit aller sonstigen Umstände die Regelmäßigkeit der ausgeglichenen Reihe desto größer sein wird, je kleiner der mittlere Fehler ist, stellt er die Aufgabe[2]), die Koeffizienten p so zu bestimmen, daß

$$\varphi = \sqrt{p_0^2 + 2(p_1^2 + p_2^2 + \cdots p_n^2)} = \text{Minimum}$$

ist, während die Bedingungsgleichung

$$\psi_0 = p_0 + 2(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - 1 = 0$$

besteht, und, falls $2r + 1$ die Ordnung der Parabel ist, das System

$$\psi_1 = 1^2 p_1 + 2^2 p_2 + \cdots + n^2 p_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_r = 1^{2r} p_1 + 2^{2r} p_2 + \cdots n^{2r} p_n = 0$$

1) Vgl. für die Behmsche Korrektion des zu (60) gehörenden Fehlers: *Blaschke, Die Theorie der Ausgleichung* usw. Seite 108ff.

2) *Die Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums*, l. c. und Math. Techn. Kap. S. 582.

gilt. Die Aufgabe ist also:

$$\varphi + k_0\psi_0 + k_1\psi_1 + \cdots + k_r\psi_r = \Phi$$

zu einem Minimum zu machen.

Man findet z. B. für $n = 9$ und $2r + 1 = 3$:

$$u_x' = \frac{1}{2261}\{269u_x + 264(u_{x+1} + u_{x-1}) + 249(u_{x+2} + u_{x-2})$$
$$+ 224(u_{x+3} + u_{x-3}) + 189(u_{x+4} + u_{x-4}) + 144(u_{x+5} + u_{x-5})$$
$$+ 89(u_{x+6} + u_{x-6}) + 24(u_{x+7} + u_{x-7}) - 51(u_{x+8} + u_{x-8})$$
$$- 136(u_{x+9} + u_{x-9}).$$[1])

63. Dasselbe Minimumskriterium begründet Herr *Achard*[2]), indem er davon ausgeht, daß, falls h_i die Genauigkeit des Wertes u_{x+i} ist, die Genauigkeit H des Wertes u_x' durch die Gleichung definiert ist:

$$\frac{1}{H^2} = \sum \frac{p_i^2}{h_i^2}.$$

Ersetzen wir die verschiedenen h_i durch einen Mittelwert h, so wird die vorherige Gleichung zu

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2}\sum p_i^2.$$

Die Genauigkeit H ist also desto größer, je kleiner $\sum p_i^2$ ist.

Man findet z. B. für die Woolhousesche Formel:

$$\sum p_i^2 = 0{,}17926 = \frac{1}{5{,}578}.$$

1) Mathematisch interessanter und von ähnlichen aber schärfer formulierten Forderungen ausgehend ist die Aufgabe, die sich *Bohlmann, Ein Ausgleichungsproblem*, Mitteilungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften 1890, 3) gestellt hat. Es soll, falls bzw. y_x und η_x den beobachteten und den ausgeglichenen Wert bedeuten, und γ^2 eine positive Größe (das Gewicht) ist,

$$\sum_{x=1}^{n}(\eta_x - y_x)^2 + \gamma^2 \sum_{x=1}^{n-1}(\eta_{x+1} - \eta_x)$$

zu einem Minimum gemacht werden. Notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß

$$\eta_x - y_x = \gamma^2[\Delta\eta_x - \Delta\eta_{x-1}] = \gamma^2\Delta^2\eta_{x-1}$$
$$(\Delta\eta_0 = \Delta\eta_n = 0).$$

2) *Note sur l'ajustement des tables de mortalité,* in Bull. trim. de l'Inst. des Actuaires Français, Dezember 1905, p. 247.

Lassen wir jedem Werte u_{x+i}, welcher in der Woolhouseschen Formel vorkommt, das Gewicht $5 - i$ entsprechen (d. h. ein Gewicht, das gleich der Anzahl der Parabeln ist, welche an der Bestimmung der in jedem einzelnen Punkte geltenden *Mittelwerte* teilnehmen) und halten wir an der Hypothese fest, daß die eingeführten Parabeln von der zweiten Ordnung sind, so gelangen wir durch Bestimmung der Koeffizienten p_i nach der Methode der kleinsten Quadrate zu einer Ausgleichungsformel[1]), für welche

$$\sum p_i^2 = 0{,}16014301 = \frac{1}{6{,}245}$$

ist. Es ist aber auch für die Formel, welche der Hypothese entspricht, daß alle Gewichte der Einheit gleich sind:

$$\sum p_i^2 = \frac{1}{6{,}66}.$$[2])

Es wäre verkehrt, daraus zu schließen, daß die Formel, welche dem zweiten Gewichtssystem entspricht, korrekter ist, als die andere; der Vergleich kann nur für Formeln einen Sinn haben, deren Gewichtssysteme identisch sind. Auch würde die Anwendung des in Rede stehenden Kriteriums dahin führen, der Woolhouseschen Formel den Vorzug vor der Karupschen zu geben. Wir brauchen nur daran zu denken, daß letztere Formel Stetigkeitsbedingungen genügt, die von der ersten nicht erfüllt werden, um die Zulässigkeit eines einfachen Vergleichskriteriums in Abrede zu stellen.

64. Wie alle möglichen Vergleichskriterien, so hat auch dieses eine nur relative Bedeutung.

So können wir z. B. die Summe der Fehlerquadrate der beobachteten und der ausgeglichenen Werte in Betracht ziehen.

Am kleinsten ist die Summe, falls die ausgeglichenen und die beobachteten Werte identisch sind; wir schließen aber daraus nicht, daß die einfache Interpolation zwischen den beobachteten Werten das beste Ausgleichungsverfahren sei.

Das Kriterium ist nur dann brauchbar, falls es sich einfach darum handelt, die Güte von verschiedenen Näherungsmethoden

1) Vgl. *Blaschke, Vorlesungen etc.* Seite 241.
2) Vgl. *Achard*, l. c., Seite 249.

zu vergleichen, deren Resultate von demselben Grundprinzip abgeleitet worden sind. Sind die Prinzipien, auf welche sich die verschiedenen Ausgleichungsverfahren stützen, verschieden, so wird die Wahl zwischen ihnen im allgemeinen auch von ganz anderen Forderungen abhängig sein.

Analoge Bemerkungen werden betreffs des anderen Kriteriums der Differenz zwischen den wahrscheinlichen und den beobachteten Toten zu machen sein.

Tieferliegend ist eine von Herrn *Blaschke* zur Ableitung einer neuen Ausgleichungsmethode verwertete Forderung, welche darin besteht, daß die Quadratsumme der zweiten Differenzen (sowie diejenige der ersten Differenzen) für alle Werte der Erscheinung sehr klein (bei *Blaschke* möglichst klein, ein Minimum) sein müsse. Sie gründet sich auf die Betrachtung, daß sich die statistischen Funktionen nur wenig mit dem Alter verändern, so daß auch die ersten und zweiten Differenzen sehr klein sein werden. Die Beobachtungsfehler werden bei den höheren Differenzen immer mehr hervortreten.

§ 17. **Die graphische Ausgleichung.**

65. Die beobachteten Werte $u_x = u(x)$ definieren in der $x \cdot u$-Ebene ein diskretes System von Punkten, und diese ihrerseits einen geradlinigen Kurvenzug, der sie verbindet. Das graphische Ausgleichsverfahren besteht darin, daß man den erwähnten Kurvenzug durch eine stetige und reguläre Kurve (die ausgeglichene Kurve $u_x' = u'(x)$) ersetzt, die sich möglichst gut an ihn anschmiegt. Dadurch werden nicht nur die ursprünglichen Werte ausgeglichen, sondern es wird auch zwischen ihnen interpoliert.

Das graphische Verfahren ist das allgemeinste und das einfachste; es ist auch dasjenige, bei welchem die Güte der Ausgleichung am meisten von der Geschicklichkeit des Ausgleichers abhängt. Während nämlich bei den anderen Methoden die Willkür des Rechners mit der Wahl der Ausgleichsformel aufhört, begleitet sie hier die ganze Operation. Es ist dies gleichzeitig ein Vorteil und eine Schattenseite der Methode: ein Vorteil, soweit es dadurch ermöglicht wird, vorausgehende Erfahrungen zu verwerten und Eigentümlichkeiten im Verlaufe der Erscheinung hervortreten zu lassen, welche die analytischen und mechanischen Methoden schwer oder unmöglich wiedergeben würden; eine

Schattenseite, weil eben von der Willkür und sogar von den physischen Zuständen des Ausgleichers der Verlauf der ausgeglichenen Kurve abhängig gemacht wird. Dem Nachteil kann man jedoch abhelfen, und dadurch die Sicherheit der Methode erhöhen.

Ein Mittel besteht darin, daß man jedem Werte der Variablen x, für welchen ein Beobachtungswert $u(x)$ vorliegt, auch die Werte entsprechen läßt, die man dadurch erhält, daß man von $u(x)$ ein Genauigkeitsmaß — etwa ein Mehrfaches des mittleren oder des wahrscheinlichen Fehlers — abzieht, oder man zu jedem Werte $u(x)$ dieselbe Größe hinzufügt. Wir wissen, daß eine angebbare Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß die Differenz zwischen einer Wahrscheinlichkeit *a priori* und dem *a posteriori* bestimmten Werte derselben ein gewisses Mehrfaches des mittleren Fehlers nicht überschreitet. Wir können also ein solches Mehrfaches λm des mittleren Fehlers wählen, daß man praktisch den Fall ausschließen kann, daß der Wert *a priori* der Wahrscheinlichkeit, deren empirischer Ausdruck $u(x)$ ist, nicht dem Intervall $(u(x) - \lambda m,\ u(x) + \lambda m)$ angehört. Verbinden wir die Werte $u(x) + \lambda m$ miteinander durch einen geradlinigen Kurvenzug, und ebenso die Werte $u(x) - \lambda m$, so begrenzen die zwei Kurvenzüge einen Streifen, innerhalb dessen die ausgeglichene Kurve verlaufen muß.

66. Oft wird auch die graphische Methode als eine vorläufige betrachtet und mit anderen verbunden. So gleicht z. B. *Fischer* graphisch aus, und nachdem er zu einer Kurve gelangt ist, die sich möglichst gut an die Beobachtungskurve anschmiegt, geht er von jener zu einer neuen über, indem er diese nach der Methode der kleinsten Quadrate entwickelt und der Forderung genügt, daß die Endkurve für gewisse Strecken parallel der graphisch bestimmten Kurve sein müsse.

Sind $u'_{x+1}, u'_{x+2}, u'_{x+3} \ldots u'_{x+n}$ ausgeglichene Werte, $u''_{x+1}, u''_{x+2}, \ldots u''_{x+n}$ die entsprechenden graphisch ermittelten Werte, so verlangt also Fischer, daß

$$\begin{aligned} u'_{x+2} - u'_{x+1} &= u''_{x+2} - u''_{x+1} \\ u'_{x+3} - u'_{x+1} &= u''_{x+3} - u''_{x+1} \\ &\ldots\ldots \\ u'_{x+n} - u'_{x+1} &= u''_{x+n} - u''_{x+1}, \end{aligned}$$

so daß die Minimumsaufgabe

$$\sum p_{x+i}(u'_{x+i} - u_{x+i})^2 = \text{Minimum}$$

zu

$$\sum p_{x+i}(u'_{x+1} + u''_{x+i} - u''_{x+1} - u_{x+i})^2 = \text{Minimum}$$

wird.

§ 18. Die Sterblichkeit unter dem Einfluß der Invalidität. (Die Grundgrößen und -beziehungen der Invaliditätsstatistik.)

67. Wird außer der Sterblichkeit die Invalidität in Betracht gezogen, so kommt zu dem Begriff der „Absterbeordnung" derjenige einer „Aktivenordnung" hinzu, welche dadurch definiert ist, daß man für jedes Wertepaar (x, z), $(x \leqq z)$, die Existenz der Wahrscheinlichkeiten dafür postuliert, daß eine der Gesamtheit angehörende Person, die x Jahr alt ist, das Alter z als Aktiver erreicht, bzw. daß sie wohl das Alter z, nicht aber als Aktiver erreicht, bzw. daß sie im Altersintervall (x, z) als Aktiver stirbt.

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten ist die Zerfällung der ursprünglichen Gesamtheit, die wir aus gleichaltrigen Aktiven zusammengesetzt denken, in zwei Gruppen definiert: in eine Gruppe von Aktiven und in eine Gruppe von Nichtaktiven, d. h. von Invaliden. Während der Bestand der ersteren Gruppe mit der Angabe der Aktivenordnung definiert ist, bedarf es zur Definition des Bestandes der Invalidengruppe weiterer Hypothesen, insbesondere der Hypothese der Existenz der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der im Alter x invalidgewordene Aktive, welcher das Alter y erreicht hat, das Alter z ebenfalls erreiche $(x \leqq y \leqq z)$. Allgemein werden wir nur sagen können, daß die Invalidengruppe, deren Anfangsbestand 0 ist, sich um die Invalidgewordenen vermehrt und um die absterbenden Invaliden vermindert, bis sie ein gewisses Maximum erreicht, von welchem ab sie sich vermindert.

Berücksichtigt man bei der Erforschung der Sterblichkeit von Invaliden die Dauer der Invalidität, so hat man es mit Gesamtheiten zu tun, die wir mit *E. Blaschke* „dreimächtig" nannten (§ 11); ihre formale Theorie ist mit der Behandlung der allgemeinen Theorie der dreimächtigen Gesamtheiten erschöpft und unterscheidet sich z. B. nicht von der Theorie der Sterblichkeit von Versicherten, deren Eintrittsalter in die Versicherung berück-

sichtigt wird; die Invalidität spielt hier genau dieselbe Rolle, wie dort die Auslese. Wir werden jedoch von der Invaliditätsdauer absehen.

69. Wir wollen die Grundwahrscheinlichkeiten näher definieren:

Es seien

$p_{aa}(x, z)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aktiver des Alters x das Alter z als Aktiver überlebt;

$q_{aa}(x, z)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aktiver des Alters x im Altersintervall (x, z) als Aktiver stirbt;

$W(x, z)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aktiver des Alters x im Altersintervall (x, z) invalid wird.

Es ist

$$p_{aa}(x, z) + q_{aa}(x, z) + W(x, z) = 1$$

und insbesondere, falls man $p_{aa}(x, x+1) = p_{aa}(x)$, $q_{aa}(x, x+1) = q_{aa}(x)$, $W(x, x+1) = W(x)$ schreibt,

$$p_{aa}(x) + q_{aa}(x) + W(x) = 1\,.$$

Durch $p_{aa}(x, z)$ ist eine positive beständig abnehmende Funktion $l_a(x)$ definiert $(x_0 \leq x \leq \omega)$, die wir „die Zahl der Aktiven des Alters x" nennen; denn es ist $(x \leq y \leq z)$

$$p_{aa}(x_0, z) = p_{aa}(x_0, y) \cdot p_{aa}(y, z)\,,$$

woraus

$$p_{aa}(y, z) = \frac{p_{aa}(x_0, z)}{p_{aa}(x_0, y)} = \frac{C \cdot p_{aa}(x_0, z)}{C \cdot p_{aa}(x_0, y)} = \frac{l_a(z)}{l_a(y)}$$

folgt. Dabei ist C eine positive Konstante und zwar $C = l_a(x_0)$.

Genau wie für die „Zahl der Lebenden" l_x wird hier die Beziehung gelten:

$$l_a(x) = l_a(x_0) \prod_{x_0}^{x-1} p_{aa}(u)\,.$$

Aus der Beziehung

$$p_{aa}(x, y) = 1 - q_{aa}(x, y) - W(x, y)$$

folgt, falls man beide Glieder derselben mit $l_a(x)$ multipliziert und

$$q_{aa}(x, y) = \frac{t_a(x, y)}{l_a(x)}$$

$$W(x, y) = \frac{j(y, y)}{l_a(x)}$$

schreibt:

$$l_a(y) = l_a(x) - t_a(x, y) - j(x, y)\,. \qquad (61)$$

Dabei bezeichnet offenbar $t_a(x, y)$ die Zahl der im Altersintervall (x, y) verstorbenen Aktiven $j(x, y)$ die Zahl der im Altersintervall (x, y) invalid Gewordenen.

Setzt man $y = \omega$ und $t_a(x, \omega) = t_a(x)$, $j(x, \omega) = j(x)$, so geht Gleichung (61) in

$$l_a(x) = t_a(x) + j(x)$$

oder, falls man die Differentiierbarkeit der Funktionen $l_a(x)$, $t_a(x)$, $j(x)$ postuliert, in

$$\frac{1}{l_a(x)} \frac{d\,l_a(x)}{dx} = \frac{1}{l_a(x)} \frac{d\,t_a(x)}{dx} + \frac{1}{l_a(x)} \frac{d\,j(x)}{dx}$$

über. Bezeichnet man mit

$$\mu_{aa}(x) = -\frac{1}{l_a(x)} \frac{d\,l_a(x)}{dx}$$

die Ausscheideintensität („die Ausscheidekraft") der Aktiven, mit

$$\mu_a(x) = -\frac{1}{l_a(x)} \frac{d\,t_a(x)}{dx}$$

die Sterbeintensität („die Sterblichkeitskraft") der Aktiven, mit

$$\nu(x) = -\frac{1}{l_a(x)} \frac{d\,j(x)}{dx}$$

die Intensität des Invalidewerdens („die Invaliditätskraft"), so gilt also die Fundamentalbeziehung:

$$\mu_{aa}(x) = \mu_a(x) + \nu(x)\,. \qquad (61')$$

Genau wie für die Sterbeintensität μ_x (vgl. § 8) hat man hier

$$p_{aa}(x) = \frac{l_a(x+1)}{l_a(x)} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_{aa}(z)\,dz} = e^{-\int_x^{x+1} (\mu_a(z) + \nu(z))\,dz}\,.$$

Setzt man rein formal (d. h. ohne daß eine selbständige Bedeutung den dadurch definierten Größen $\overline{W(x)}$ und $\overline{p_a(x)}$ zukomme)

$$\overline{W(x)} = e^{-\int_x^{x+1} \nu(z)\,dz}$$

$$\overline{p_a(x)} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_a(z)\,dz}\,,$$

so hat man auch

$$p_{aa}(x) = \overline{W(x)} \cdot \overline{p_a(x)}\,. \qquad (62)$$

Mit der Gleichung (62) ist eine Methode zur Ermittelung der Wahrscheinlichkeit $p_{aa}(x)$ (die sogenannte *Karup*sche Methode der „unabhängigen“ Invaliditätswahrscheinlichkeit[1]) klargelegt, die sich auf die Fiktion der Möglichkeit gründet, die Wirkungen der Invalidität und der Sterblichkeit auseinander zu halten.

70. Wir gehen nun zur Invalidenordnung über. Es sei $q_{ai}(x, y)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aktiver des Alters x im Altersintervall (x, y) invalid wird und hierauf im gleichen Altersintervall stirbt, mit $q_{ai}(x)$ bezeichnen wir insbesondere die Wahrscheinlichkeit, daß der Aktive des Alters x im folgenden Jahre invalid wird und darauf im gleichen Jahre stirbt;

$p_{ai}(x, y)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aktiver des Alters x im Altersintervall (x, y) invalid wird und das Alter y erreicht (insbesondere $p_{ai}(x, x+1) = p_{ai}(x)$),

$q_a(x, z)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aktiver des Alters x im Altersintervall (x, z) stirbt, sei es im aktiven, sei es im invaliden Zustand; (insb. $q_a(x, x+1) = q_a(x)$),

$p_a(x, z)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aktiver des Alters x das Alter z erreicht, sei es als Aktiver, sei es als Invalider; (insbes. $p_a(x, x+1) = p_a(x)$),

$q_i(x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Invalider des Alters x im Altersintervall $(x, x+1)$ sterbe,

$p_i(x) = 1 - q_i(x)$.

Man hat offenbar

$$q_{ai}(x) + p_{ai}(x) = W(x); \quad q_{aa}(x) + q_{ai}(x) = q_a(x);$$
$$q_a(x) + p_a(x) = 1; \quad p_{aa}(x) + p_{ai}(x) = p_a(x);$$
$$q_{ai}(x) + p_{ai}(x) + q_{aa}(x) + p_{aa}(x) = 1.$$

Bezeichnen wir, wie gewöhnlich, mit l_x die Zahl der Lebenden des Alters x, und bezeichnet $l_i(x)$ die Zahl der Invaliden desselben Alters, so wird zunächst die Beziehung gelten:

$$l_x = l_a(x) + l_i(x),$$

1) Vgl. über die Literatur des Gegenstandes *v. Bortkievicz*, Encykl. der math. Wissenschaften, ID4a, S. 843, 850 und die Referate in der Zeitschr. f. Versicherungswissenschaft.

$l_i(x)$ ist mit der Angabe der Größen $l_a(x)$, $p_{ai}(x)$, $p_i(x)$ eindeutig definiert. Es ist für ein gewisses Anfangsalter α:

$$l_i(\alpha) = 0.$$

Von den $l_a(\alpha)$ Aktiven des Alters α werden im folgenden Jahr invalid und überleben es $l_a(\alpha)p_{ai}(\alpha)$. Es ist also

$$l_i(\alpha + 1) = l_a(\alpha)p_{ai}(\alpha).$$

Die Gruppe der Invaliden des Alters $\alpha + 2$ besteht aus den $l_i(\alpha + 1) \cdot p_i(\alpha + 1)$ Invaliden des Alters $\alpha + 1$, die das Alter $\alpha + 2$ erreichen, und aus den $l_a(\alpha + 1)p_{ai}(\alpha + 1)$ Invaliden, die aus den $l_a(\alpha + 1)$ Aktiven des Alters $\alpha + 1$ hervorgehen. Man hat:

$$l_i(\alpha + 2) = l_i(\alpha + 1)p_i(\alpha + 1) + l_a(\alpha + 1)p_{ai}(\alpha + 1)$$
$$= l_a(\alpha)p_{ai}(\alpha)p_i(\alpha + 1) + l_a(\alpha + 1)p_{ai}(\alpha + 1)$$

ebenso:

$$l_i(\alpha + 3) = l_a(\alpha)p_{ai}(\alpha)p_i(\alpha + 1)p_i(\alpha + 2)$$
$$+ l_a(\alpha + 1)p_{ai}(\alpha + 1)p_i(\alpha + 2) + l_a(\alpha + 2)p_{ai}(\alpha + 2)$$

. . . .

$$l_i(\alpha + n) = l_a(\alpha)p_{ai}(\alpha)\prod_{\alpha+1}^{\alpha+n-1} p_i(u) + l_a(\alpha + 1)p_{ai}(\alpha + 1)\prod_{\alpha+2}^{\alpha+n-1} p_i(u)$$
$$+ \cdots + l_a(\alpha + n - 1)p_{ai}(\alpha + n - 1),$$

so daß man auch

$$l_i(x) = \sum_{z=\alpha}^{z=x-1}\Big[l_a(z)p_{ai}(z)\prod_{z+1}^{x-1} p_i(u)\Big] \tag{63}$$

schreiben kann. Die Bedeutung der Funktion

$$\psi_i(x) = C\prod_{\alpha}^{x-1} p_i(z)$$

(C = Konstante), die wir neben $l_i(x)$ einführen, ist unmittelbar einleuchtend.

Ihre Auswertung (die mit der Bestimmung der Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_i(x)$ eines Invaliden erledigt ist) bildet kein neues Problem.

71. Bezeichnet man mit p_x bzw. q_x die allgemeinen Überlebens- bzw. Sterbenswahrscheinlichkeiten, die l_x entsprechen, so hat man

$$l_x q_x = l_a(x)(q_{aa}(x) + q_{ai}(x)) + l_i(x)q_i(x) = l_a q_a(x) + l_i(x)q_i(x)$$
$$l_x p_x = l_a(x)(p_{aa}(x) + p_{ai}(x)) + l_i(x)p_i(x) = l_a(x)p_a(x) + l_i(x)p_i(x)$$

also:

$$q_{ai}(x) = q_x - q_{aa}(x) - \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(q_i(x) - q_x)$$

$$= q_i(x) - q_{aa}(x) - \frac{l_x}{l_a(x)}(q_i(x) - q_x)$$

$$p_{ai}(x) = p_x - p_{aa}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(p_x - p_i(x)) \qquad (64)$$

$$= p_i(x) - p_{aa}(x) + \frac{l_x}{l_a(x)}(p_x - p_i(x)) \qquad (65)$$

und:

$$\frac{l_i(x)}{l_a(x)} = \frac{q_x - q_a(x)}{q_i(x) - q_x} = \frac{p_a(x) - p_x}{p_x - p_i(x)}.$$

72. Sind nun eine allgemeine Sterblichkeitstafel, eine Invalidisierungstafel, aus welcher sich die Werte $W(x)$ ergeben, und eine Invalidensterbetafel gegeben, welche die Werte

$$p_i(x) = \frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}, \quad q_i(x) = 1 - p_i(x)$$

liefert, so kann man die Wahrscheinlichkeiten $p_{ai}(x)$, $q_{ai}(x)$ dadurch bestimmen, daß man setzt:

$$p_{ai} = W(x) - q_{ai}(x)$$

$$q_{ai} = \tfrac{1}{2}W(x)q_i(x), \qquad (66)$$

wobei Formel (66) aus der Annahme hervorgeht, daß sich Invalidisierung und Invalidensterblichkeit gleichmäßig auf das Jahr verteilen.

Dies ist der Weg, den *H. Bentzien* und *H. Zimmermann* bei der Bestimmung der Invaliditätsverhältnisse des deutschen Eisenbahnpersonals einschlugen.[1]) Die Näherungsformel (66) erhält man auch dadurch, daß man von der Ungleichung

$$p_i(x)W(x) < p_{ai}(x) < W(x)$$

ausgeht, und

$$p_{ai}(x) = W(x)\frac{1 + p_i(x)}{2} + \varepsilon$$

setzt. Hier ist der absolute Betrag des größtmöglichen Fehlers kleiner als $\frac{1}{2}W(x)q_i(x)$. Vernachlässigt man ε und berechnet q_{ai} aus

$$p_{ai}(x) + q_{ai}(x) = W(x),$$

so findet man:

$$q_{ai} = W(x) - W(x)\frac{1 + p_i(x)}{2} = \tfrac{1}{2}W(x)q_i(x).$$

1) Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik. Berlin 1887, 88.

Operiert man mit „Intensitäten" und setzt

$$\overline{\mu_i(x)} = -\frac{1}{\psi(x)}\frac{d\psi(x)}{dx},$$

so wird man analog (hier aber ganz streng!) die Zahl der Invalidgewordenen, welche nicht sterben, sondern die Zeit dx überleben, gleich

$$l_a(x)\,\nu(x)\,dx\left(1 - \frac{\overline{\mu_i(x)}\,dx}{2}\right)$$

setzen. Ist also μ_x die Sterbeintensität, die zu l_x gehört, so wird die Identität gelten:

$$l_x\mu_x dx = l_a(x)\mu_{aa}(x)dx + l_i(x)\overline{\mu_i(x)}dx$$

$$- l_a(x)\,\nu(x)\,dx\left(1 - \frac{\overline{\mu_i(x)}\,dx}{2}\right),$$

woraus:

$$\mu_{aa}(x) = \mu_x + \nu(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\left(\mu_x - \overline{\mu_i(x)}\right).^{1)} \qquad (67)$$

73. Zu neuen Beziehungen zwischen den fundamentalen Wahrscheinlichkeiten und zu neuen Methoden zu ihrer Bestimmung gelangt man unter Zugrundelegung der in Nr. 69 formal eingeführten Wahrscheinlichkeit:

$$\overline{p_a(x)} = e^{-\int_x^{x+1}\mu_a(z)\,dz}.$$

Setzen wir nämlich

$$\overline{p_a(x)} = \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

— wo $f(x)$ lediglich von der Sterblichkeit unter den Aktiven abhängt, so daß die Invalidisierung als ein Ausscheiden aus der Beobachtung betrachtet wird — und bezeichnen wir mit $\lambda_i(x)$ die Zahl derjenigen Individuen, die im Alter x invalid werden, d. h. setzen wir

$$j(x, x+1) = j(x) = \int_x^{x+1}\lambda_i(z)\,dz$$

$$W(x, x+1) = W(x) = \frac{\int_x^{x+1}\lambda_i(z)\,dz}{l_a(x)},$$

1) Vgl. *Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung* von *Dr. G. Schaertlin*, Bonn 1907, S. 9.

so geht offenbar die fundamentale Differentialgleichung (61')

$$\mu_{aa}(x) = \mu_a(x) + \nu(x)$$

in

$$\frac{l_a'(x)}{l_a(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\lambda_i(x)}{l_a(x)}$$

also in

$$l_a'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} l_a(x) + \lambda_i(x) = 0$$

über. Es ist dies eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung in $l_a(x)$, deren allgemeines Integral

$$l_a(y) = \frac{f(y)}{f(x)}\left(C - \int_x^y \lambda_i(t)\frac{f(x)}{f(t)}\,dt\right)$$

ist. Aus $y = x$ folgt, daß

$$C = l_a(x)$$

ist, so daß man schreiben kann:

$$\frac{l_a(x+1)}{l_a(x)} = \frac{f(x+1)}{f(x)} - \int_x^{x+1} \frac{f(x+1)}{f(t)}\,\frac{\lambda_i(t)}{l_a(x)}\,dt$$

$$p_{aa}(x) = \overline{p_a(x)} - \int_x^{x+1} \frac{f(x+1)}{f(t)}\,\frac{\lambda_i(t)}{l_a(x)}\,dt. \tag{68}$$

Behm ersetzt die unter dem Integralzeichen vorkommende Funktion durch $W(x)\frac{f(x+1)}{f(t)}$, wodurch er den Wert von $p_{aa}(x)$ etwas erniedrigt; nehmen wir dazu noch an, daß

$$\frac{d f(t)}{dt} = \text{Const.} = -f(x) + f(x+1),$$

so erhalten wir für $p_{aa}(x)$ den Wert

$$p_{aa}(x) = \overline{p_a(x)} + \frac{W(x)\overline{p_a(x)}}{1 - \overline{p_a(x)}} \log \overline{p_a(x)}. \tag{69}$$

Werden für $\log p_a(x)$ die Reihenentwicklungen

$$\log x = -2\,\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 - \frac{2}{5}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^5 - \cdots;$$

bzw.

$$\log x = -(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)^2 - \tfrac{1}{3}(1-x)^3 - \cdots$$

in die Gleichung (69) eingesetzt, und werden alle Glieder vernachlässigt, die dem ersten Gliede folgen, so geht sie in

$$p_{aa}(x) = \overline{p_a(x)} - \frac{2\,W(x)\overline{p_a(x)}}{1 + \overline{p_a(x)}} \tag{70}$$

bzw. in

$$p_{aa}(x) = \overline{p_a(x)} - \frac{W(x)\left(1 + \overline{p_a(x)}\right)}{2} \tag{71}$$

über.

Letzteren Ausdruck, der sich für praktische Zwecke besonders eignet, leitet *Bohlmann* direkt aus der Überlegung ab, daß

$$\overline{p_a(x)} - W(x) \quad \text{bzw.} \quad \overline{p_a(x)} - \overline{p_a(x)}\,W(x)$$

die untere bzw. die obere Grenze von $p_{aa}(x)$ sind. Identifiziert man diese Wahrscheinlichkeit mit ihrem arithmetischen Mittel, so hat man die Formel (71).

74. Keiner näheren Begründung bedarf die Gleichung

$$p_{ai}(x) = \int_x^{x+1} \frac{\lambda_i(t)}{l_a(x)}\,\frac{\psi(x+1)}{\psi(t)}\,dt. \tag{72}$$

Wird unter dem Integralzeichen $\frac{\lambda_i(t)}{l_a(x)}\,\frac{\psi(x+1)}{\psi(t)}$ durch $W(x)\frac{\psi(x+1)}{\psi(t)}$ ersetzt und

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \text{Const.}$$

angenommen, so findet man die (70) bzw. (71) entsprechenden Ausdrücke

$$p_{ai}(x) = \frac{2\,W(x)\cdot p_i(x)}{1 + p_i(x)} \tag{73}$$

bzw.

$$p_{ai}(x) = -\frac{W(x)\,p_i(x)}{1 - p_i(x)} \log p_i(x). \tag{74}$$

75. Es bezeichne

L_a die Anzahl der Aktiven des Alters x, am Anfang des Beobachtungsjahres,

L_i die Anzahl der Invaliden desselben Alters und zur selben Zeit,

J die Anzahl der aus L_a im Laufe des Beobachtungsjahres hervorgegangenen Invaliden,

T_a die Anzahl der im aktiven,

T_i die Anzahl der im invaliden Zustande und im Laufe des Jahres Gestorbenen,

A_a die Anzahl der Aktiven,

A_i die Anzahl der Invaliden, die im Laufe des Jahres und vor der Invalidisierung (falls es sich um die A_a handelt) und vor dem Tode aus der Beobachtung ausgetreten sind,

E_a die Anzahl der Aktiven, die im Laufe des Jahres und zwischen den Altersgrenzen $(x, x+1)$ zu den vorhandenen Aktiven hinzugekommen sind.

Wir werden zu setzen haben (vgl. § 7), falls $0 < \Theta < 1$ ist:

$$q_a(x) = \frac{T_a + T_i}{L_a + \theta(E_a - A_a)}$$

$$q_{aa}(x) = \frac{T_a}{L_a + \theta(E_a - A_a)}$$

$$\overline{q_a(x)} = \frac{T_a}{L_a + \theta(E_a - A_a - J)}$$

$$W(x) = \frac{J}{L_a + \theta(E_a - A_a)}$$

$$\overline{W(x)} = \frac{J}{L_a + \theta(E - A - J)}$$

$$q_i(x) = \frac{T_i}{L_i + \theta(J - A_i)}.$$

Aus diesen Formeln lassen sich

$$q_{ai}(x) = \theta \cdot w(x) \cdot q_i(x)$$

$$p_{aa}(x) = \overline{p_a(x)}\left(1 - \overline{w(x)}\right)$$

und die übrigen Wahrscheinlichkeiten in Funktion der angegebenen Zahlen bestimmen. Wird die gleichmäßige Verteilung der Invalidisierungen, der Sterbefälle und der Ein- und Austritte auf das Jahr vorausgesetzt, so ist überall θ durch die Zahl $\frac{1}{2}$ zu ersetzen (vgl. § 7).

Die Frage der Bestimmung der Gesamtheiten L von Lebenden und T von Toten bietet keine neuen Probleme gegenüber der Frage dieser Bestimmung in dem Falle, wo einfach die Überlebenswahrscheinlichkeit p_x auf Grund der Gesamtheiten $L_a + L_i$ von Lebenden und $T_a + T_i$ von Toten zu bestimmen ist (vgl. § 7).

Auch betreffs der Ausgleichung werden die besprochenen mechanischen Ausgleichungsmethoden oder die graphische Ausgleichung zum Ziele führen, ohne daß wesentlich neue Schwierigkeiten entstehen.

Es ist jedoch folgendes zu bemerken. Die selbständige Ausgleichung der in Betracht kommenden Zahlenreihen z. B. der Funktionen l_x, $l_a(x)$, $l_i(x)$, $\lambda_i(x)$, $\psi(x)$ wird zu Werten führen, die im allgemeinen mit keiner genügenden Annäherung den Beziehungen genügen, die zwischen ihnen bestehen sollen. Man wird also entweder die erhaltenen Werte oder die Werte der dadurch bestimmten Wahrscheinlichkeiten wieder ausgleichen und dadurch zu neuen ausgeglichenen Werten der Grundfunktionen gelangen oder auf die Beziehungen, welche bestehen sollen, dadurch Rücksicht nehmen, daß man aus einzelnen Grundfunktionen auf Grund dieser Beziehungen die Werte der übrigen Funktionen ableitet und von den ausgeglichenen Werten dieser letzteren zu einer neuen Ausgleichung der ersteren rückwärts gelangt.

So wird man z. B. auf Grund der ausgeglichenen Werte von $l_a(x)$ und der unausgeglichenen Werte von $W(x)$ die unausgeglichenen Werte von $\lambda_i(x)$ bestimmen und aus den darauf ausgeglichenen Werten von $\lambda_i(x)$ und aus den Werten von $l_a(x)$ die ausgeglichenen Werte von $W(x)$ erhalten.

Das Verfahren, das man im wesentlichen bei der Ausgleichung deutscher Tafeln angewandt hat, ist das *Woolhouse*sche Verfahren. Nur hat man einzelne Stücke nach Parabel- oder Hyperbelbögen wieder ausgeglichen und für die jüngeren Altersstufen parabolisch extrapoliert.

Es ist übrigens zu bemerken, daß *Heym* die Makehamsche Hypothese auch für die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten und Intensitäten gelten lassen will, indem er die Invalidisierungskraft $\nu(x)$ durch die Gleichung definiert:

$$\nu(x) = \alpha + \beta\gamma^x$$

(wo α, β, γ konstant sind). Nach ihm wachsen also die Differenzen der Invalidisierungsintensitäten, genau wie diejenigen der Sterbeintensitäten, nach einer geometrischen Progression.[1])

1) Vgl. über die Literatur des Gegenstandes, der hier nur gestreift werden konnte, die *Bohlmann*schen und *von Bortkiewicz*schen Encyklopädiereferate, S. 846—851, 857.

Unter den Sterbetafeln von Invaliden sind besonders diejenigen von

§ 19. Die Gewinnung des Materials.

76. Wie wir gesehen haben, führt das Bedürfnis einer möglichst ausgedehnten Grundlage die Lebensversicherungsgesellschaften dazu, ihr Beobachtungsmaterial zu vereinigen, um die Daten beizubringen, die zur Bestimmung der jedem Alter entsprechenden Sterbenswahrscheinlichkeiten nötig sind. Dazu ist aber nicht nur eine sachliche (zeitliche u. dergl.) Homogeneität des Erfahrungsmaterials notwendig, sondern auch eine gewisse formelle Homogeneität, die dadurch erreicht wird, daß die Erhebung des Materials bei den verschiedenen Anstalten nach einem einheitlichen Schema stattfindet, so daß ebenso gut die Identität der zugrunde gelegten Gesamtheiten von Versicherten (vgl. § 11), wie die Konstanz dessen, was als Zähleinheit gilt (die versicherte Person oder der Versicherungsvertrag oder die Summe oder die Auslese) und der Modalität der Manipulation erreicht wird. Die Wahl der Zähleinheit ist keineswegs gleichgültig, weder betreffs der Mittel der Erhebung und der Möglichkeit Fehler zu vermeiden, die von der Existenz mehrfach versicherter Individuen abhängen, noch in bezug auf den logischen Wert des gesammelten Materials.

Die Wahl der versicherten Person als Zähleinheit ist besonders für die Vitalstatistik wichtig und erfordert, daß man jede einzelne Person ein einziges Mal zählt, unabhängig von der Anzahl der Versicherungen, welche dieselbe abgeschlossen hat. Entspricht also jeder Versicherung eine Zählkarte, so soll es möglich sein, die verschiedenen Zählkarten durch eine einzige zu ersetzen, welche dieselben nach ein für allemal festgestellten Prinzipien wiedergibt.

H. Zimmermann und von *H. Bentzien* zu erwähnen; der zweiten liegt ein Material von 209 548 Personen und von 12 375 Sterbefällen zugrunde. Die Beobachtungen, die sich auf die Periode 1868—1889 erstrecken, beziehen sich aber nicht auf „Invalide“ allein, sondern auf „Pensionisten“ der deutschen Eisenbahnverwaltung. Derselbe Umstand macht sich für die eigentliche „Invalidisierungstafel“ geltend, welche anstatt die Werte von $W(x)$ zu liefern, nur die (größere) Wahrscheinlichkeit dafür liefert, daß ein Aktiver „dienstuntauglich“ wird. Für die Periode 1868—1889 umfaßt die Tafel von *Bentzien* ein Material von 3 074 513 einjährig Beobachteten und von 33 808 Dienstuntauglichkeitsfällen.

Wesentlich auf demselben Beobachtungsmaterial beruht die Sterbetafel des gemischten Bestandes, die 45 402 Todesfälle umfaßt.

Wird dagegen die Police als Zähleinheit angenommen, so wird man auch jede Person ebenso oft zählen, als sie versichert worden ist. Die Wahl dieser Zähleinheit (die z. B. für die Tafel der 17 englischen Gesellschaften getroffen wurde), welche die Sterblichkeit als von der Willkür des Versicherten abhängig erscheinen läßt, läßt sich dadurch rechtfertigen, daß man die Gesamtheit der Policen mit einer Urne identifiziert, welche miteinander irgendwie verbundene Kugeln enthält; man kann von dieser Abhängigkeit absehen, falls man die Anzahl der Versuche wachsen läßt und nur das Endergebnis in Betracht zieht. Auf analogen Betrachtungen beruht die Wahl der Versicherungssumme als Zähleinheit, eine Wahl, welche dahin führt, jede Person für die Bildung des Sterblichkeitsdurchschnitts mit einem Gewicht zu versehen, welches der Höhe der Versicherungssumme proportional ist. Dieses Verfahren vermindert jedoch in unzulässiger Weise den Ausgleich vermöge des Gesetzes der großen Zahlen. Ferner gibt es die Wahl der Selektion als Zähleinheit, nach welcher jede Person so oft in Betracht zu ziehen ist, als sie auf Grund ärztlicher Untersuchung neu versichert worden ist.

Nachdem man die eine oder andere Einheit gewählt hat, wird man im Falle mehrfacher Versicherung die Dauer der Versicherung verschiedentlich bestimmen, besonders wo Unterbrechungen in der Versicherung eingetreten sind. Es ist klar, daß man eine Versicherung, die ursprünglich aufgelöst und später wieder aufgenommen wurde, betreffs des Gesundheitszustandes des Versicherten nicht mit der Versicherung identifizieren kann, die keine Unterbrechung erlitten hat. Geschieht dies, so wird die Wirkung der Selektion auf die Sterblichkeit völlig außer acht gelassen. Dies ist der Nachteil bei der Wahl der Person als Zähleinheit.

77. Was die Kriterien, die Form der Erhebung und die Einteilung des Materials anlangt, so läßt sich wenig Allgemeines sagen; es gelten die praktischen Regeln und die Betrachtungen, die jeder statistischen Erhebung zugrunde liegen.

Alle Versicherten werden in Zählkarten eingetragen, die neben den Elementen, die zur Bestimmung des versicherten Individuums dienen, wie Vor- und Familienname oder Zahl der Police (eventl. Angabe der Agentur, welche die Versicherung verschaffte), alle die Daten enthalten, welche für die Bestimmung der Sterb-

lichkeitssätze irgendwie von Interesse sein können, wie Geburts-, Eintritts- und Austrittsdatum, Eintritts- und Austrittsalter, Versicherungsdauer, Austrittsursache (Tod, Vollendung des Zähltermins, sonstige Ursachen), Todesursache, Form und Betrag der Versicherung, Art der Prämienzahlung u. dergl.

Wie dann die Zählkarten einzuteilen sind, hängt natürlich von den Zwecken ab, die man verfolgt: man wird z. B. die Fälle, wo der Tod die Ursache des Ausscheidens ist, einfach nach dem Geburtsdatum und Sterbealter oder, außer diesem, nach der Versicherungsdauer einteilen, je nachdem man den Einfluß dieses letzteren Elements auf die Sterblichkeit in Betracht zieht oder nicht.

Es braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß die sorgfältige Feststellung der Elemente der Zählkarte besonders wichtig ist, und daß die Einteilung des Materials nach den verschiedenen Unterscheidungsmerkmalen nur von der Ausdehnung des Materials selbst bedingt wird: sie muß da aufhören, wo die verschiedenen Unterklassen zu schwach besetzt würden.

§ 20. Betrachtung einiger Sterblichkeitstafeln von Gesamtheiten Versicherter.

78. Wir sehen von der *Halley*schen Tafel (1693) ab, die zwar von Versicherungsanstalten angewandt wurde, aber aus allgemeinem bevölkerungsstatistischem Material entstanden ist (bekanntlich gab sie die Sterblichkeitsverhältnisse der Breslauer Bevölkerung wieder) und erwähnen unter den ältesten Sterblichkeitstafeln, die sich auf Versicherte beziehen, diejenigen von *Kerseboom* und von *Déparcieux*. *Kerseboom* (1691—1771) bedient sich des Materials der holländischen Verwaltung des Leibrentenfonds und verfolgt das Absterben der Gruppen von Versicherten, deren Eintrittsalter gleich ist; die Ergebnisse seiner Untersuchungen stellte er in einer einzigen Tafel zusammen. Für das erste Lebensjahr benutzt *Kerseboom* die Erfahrungen der genannten holländischen und westfriesischen Bevölkerung.

Von den beiden Tafeln von *Déparcieux* (1703—1768) bezieht sich die eine auf die Mönche und Nonnen von Pariser Klöstern, die andere auf die Teilnehmer an den Tontinen, die in den Jahren 1689, 1696 und 1704 gegründet worden waren. Diese Tafel, die

sich auf ungefähr 10 000 beobachtete Individuen stützte, ist also eine Rentnertafel, d. h. eine aus der Erfahrung auserlesener Gruppen entstandene Sterblichkeitstabelle; trotzdem sind ihre Sterblichkeitssätze ziemlich hoch, besonders für die höheren Altersstufen (94 ist das höchste Alter).

Ihre Anwendung seitens der französischen Gesellschaften für die Bestimmung von Leibrentenprämien veranlaßte wiederholt dazu, die aus ihr abgeleiteten Sätze zu verbessern.

Unter den späteren Tafeln von Versicherten erwähnen wir hier diejenigen der *Equitable Society* (von *Davis*) (1825), von *de Morgan* (1834), von den beiden *Finlaison* (Vater und Sohn) (1829 und 1860, bzw. 1867) und die Tafel der *schottischen Gesellschaften* (1879): sie haben für uns nur noch historischen Wert.

Die erste unter den modernen Sterblichkeitstafeln, denen sehr ausgedehnte Beobachtungen zugrunde liegen, ist die *Tafel der 17 englischen Gesellschaften*[1]), die noch jetzt angewandt wird. Als Zähleinheit galt die Police, und es wurden ungefähr für die eine Hälfte des Materials (umfassend 83,905 Verträge) die Geschlechter getrennt gehalten, für die andere Hälfte dagegen gemeinsam behandelt. Als Unterscheidungsmerkmale für die erste Hälfte galten der Wohnort (Stadt—Land—Irland), die Austrittsursache, das Eintrittsalter und das Kalenderjahr des Austritts. Jedoch wurden die Ergebnisse beider Gruppen zu einer einzigen Tafel vereinigt. Nicht die Police, sondern die Person war die Zähleinheit der *Tafeln der 20 englischen Gesellschaften*, die 20 Jahre nach der eben erwähnten erschienen sind und noch jetzt als klassisch gelten.[2])

Das Material wurde, wie für die Tafel der 17 Gesellschaften, zur Definition von englischen Gesamtheiten (vgl. § 11, S. 98) verwendet und diente zur Herstellung von vier verschiedenen Tafeln:

die Tafel H^M *(healthy male lives)*, normale Risiken (gesunde ärztlich ausgelesene Männer ohne Unterscheidung nach Versicherungsdauer) betreffend;

die Tafel H^F *(healthy female lives)*, für ärztlich ausgelesene gesunde Frauen;

1) *Tables exhibiting the law of mortality deduced from the combined experience of 17 Life assurances Offices.* London 1843.

2) *The mortality experience of Life assurance Companies, collected by the Institute of Actuaries.* London 1863.

die Tafel H^{MF} *(healthy male and female lives)*, welche aus dem Gesamtmaterial der beiden ersten Tafeln entstanden ist und nicht nach dem Geschlecht unterscheidet;

die Tafel $H^{M(5)}$ *(healthy male lives, omitting the first five years of assurance)*, für gesunde Männer im sechsten und höheren Versicherungsjahren (d. h. nachdem die Wirkung der ursprünglichen Auslese neutralisiert ist).

Die Tafel H^{M} ist aus einem Material von 130 243 beobachteten Individuen und 20 251 Todesfällen entstanden; sie wurde ursprünglich nach der Methode von Woolhouse ausgeglichen, später (1887) auch auf die ersten 10 Lebensjahre ausgedehnt (die vorher nicht berücksichtigt worden waren) und einer neuen Ausgleichung auf Grund der Makehamschen Formel unterzogen.

Bei der Herstellung der *Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften*[1]) hat man die Person als Zähleinheit gewählt, und ein Gesamtmaterial von 858 500 Zählkarten benutzt. Die definierten Gesamtheiten waren die deutschen, und hergestellt wurden 12 Tabellen:

die Tafel für völlig untersuchte gesunde Männer *MI* (auf Grund von 2 208 256 Jahresbeobachtungen und 36 944 Toten), für untersuchte gesunde Frauen *WI*, für untersuchte gesunde Männer und Frauen *M* u. *WI*;

die Tafeln für völlig untersuchte minderwertige Männer *MII*, Frauen *WII*, Männer und Frauen *M* u. *WII*;

die Tafeln für unvollständig untersuchte Männer *MIII*, Frauen *WIII*, Männer und Frauen *M* u. *WIII* (Begräbnisgeld- und Sterbekassenversicherungen);

die Tafel für untersuchte Männer *MIV*, Frauen *WIV*, Männer und Frauen *M* u. *WIV* (Erlebens- und Rentenversicherungen).

Die Ausgleichung der Tafeln wurde von Herrn *Zillmer* ausgeführt.

Die *Tafeln der vier französischen Gesellschaften*[2]) sind:

die Tafel A. F. *(assurés français)* der völlig untersuchten und zu

1) *Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Kollegiums für die Lebensversicherungswissenschaft zu Berlin.* Berlin 1883.

2) *Tables de mortalité du Comité des Compagnies d'assurances à primes fixes sur la vie.* Paris 1895.

normalen Bedingungen versicherten Personen (für Männer, für Frauen und für beide Geschlechter);

die Tafel R. F. *(rentiers français)* für Leibrentner (für Männer, für Frauen und für beide Geschlechter).

Zur Herstellung der ersten Tafel dienten 284 775 Karten, welche 229 143 Personen und 22 617 Sterbefälle betrafen. Die Ausgleichung fand auf Grund der Makehamschen Formel statt, deren Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurden.

Die *neuen englischen Sterblichkeitstafeln*[1]) sind aus den Beobachtungen der Periode 1863—1893 entstanden und unterscheiden drei Hauptkategorien von Versicherten:

a) Todesfallversicherte;

b) Versicherte, welche gleichzeitig eine Todesfall- und eine Erlebensversicherung genommen haben (gemischte Versicherte);

c) Leibrentner und Erlebensversicherte.

Die Tafeln unterscheiden sich von den vorangehenden besonders dadurch, daß sie außer dem Geschlecht und der ärztlichen Selektion noch eine ganz andere Reihe von Elementen als Unterscheidungsmerkmale berücksichtigen.

Ihnen liegt nämlich der Gedanke zugrunde, daß die besonderen Modalitäten jeder Versicherung (Art der Prämienzahlung, Versicherungsdauer, Gewinnanteil oder nicht) auch besonderen Zweckmäßigkeitsbedingungen entsprechen, die bei wirtschaftlich verschiedenen Klassen vorhanden sind, so daß eine dritte Art der Auslese (außer der ärztlichen und der Selbstselektion) wirken wird, die wir schon soziale Selektion genannt haben.

Die Tafeln unterscheiden sich in *select-tables*, die nach dem Alter des Versicherten und nach der verflossenen Versicherungsdauer unterscheiden, und in *aggregate-tables*, bei welchen nur das Alter berücksichtigt wird.

So finden wir z. B. für die Todesfallversicherungen von Männern:

1) *Combined experience of assured lives* (1863—1893) *collected by the Institute and the Faculty of actuaries in Scotland, London 1900, vol I; Whole life assurances, males, vol II; Whole life assurances, females, vol III; Endowment assurances and minor classes of assurance, males and females, vol IV.*

A. *select-tables*, für die Versicherungen, deren Dauer zwischen 0 und 9 Jahren enthalten ist. Sie enthalten die Sterbenswahrscheinlichkeiten jeder einjährigen Altersklasse und jeder fünfjährigen Klasse, unterscheiden, je nachdem Gewinnanteil besteht oder nicht.

B. *aggregate-tables*, welche aus dem genannten Beobachtungsmaterial der Versicherungen entstanden sind, die nach dem 1. Januar 1863 und vor dem 1. Januar 1893 abgeschlossen wurden. Die Abschlußzeit wird nicht berücksichtigt, und es wird nach der Versicherungsdauer unterschieden; so findet die Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten für alle Versicherungen statt, die seit mehr wie 5, 6—10 Jahren abgeschlossen worden sind. Dadurch wird eben die stufenmäßige Verminderung des Einflusses der ursprünglichen Auslese auf die Sterblichkeit zahlenmäßig charakterisiert.

Wie für die *select-tables* werden die Versicherungen mit Anteil am Gewinn von den Versicherungen ohne Anteil getrennt behandelt.

Aus folgender Tabelle läßt sich die starke Abhängigkeit der Sterbenswahrscheinlichkeit von der verflossenen Dauer der Versicherung leicht ersehen: die Tabelle bezieht sich auf Todesfallversicherungen männlicher Leben mit Anteil am Gewinn. Die angegebenen Zahlen können annähernd auf das der Mitte der Gruppe entsprechende Alter bezogen werden.

Erreichtes Alter	Abschluß der Versicherung									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25—29	00280	00420	00511	00536	00575	00630	00759	00721	00676	00847
30—34	00355	00470	00564	00590	00640	00645	00765	00776	00774	00821
35—39	00361	00581	00662	00706	00734	00852	00859	00811	00859	00863
40—44	00516	00666	00785	00849	00864	00883	01004	00986	01053	01006
45—49	00575	00891	00965	01017	00997	01093	01101	01254	01157	01187
50—54	00888	01287	01293	01509	01439	01596	01412	01761	01743	01611
55—59	01196	01682	01848	01818	01874	02280	02285	02028	02028	02391
60—64	01664	02248	02476	02694	02476	02512	02723	02843	02845	03288
65—69	02143	03750	03075	03035	04563	04874	03913	04887	04403	04487
70—74	03819	02432	04459	07309	07114	06286	05382	07568	06220	06961
75—79	02857	08333	08235	10000	12057	06763	10506	09446	07459	11538

Wie für die Rentnertafel diente als Zähleinheit die Person, und es wurden Gothaer Gesamtheiten (vgl. § 11, S. 97)

definiert. Der Ausgleichung wurden folgende Prinzipien zugrunde gelegt:

a) die rohen Daten sind so gut als möglich der Makehamschen Formel anzupassen,

b) bei der Bestimmung der Konstanten hat der Grundsatz zu gelten, daß die Summe der Abweichungen zwischen den unausgeglichenen und den ausgeglichenen Zahlen, was diese auch bedeuten mögen (ob Lebende, Gestorbene, Lebenserwartungen und dergl.) und die Summe der aufsummierten Abweichungen Null sei,

c) da der Zweck der ausgeglichenen Tafeln in erster Linie ein praktischer ist, indem sie der Berechnung von Versicherungswerten zu dienen haben, so kommt es nicht darauf an, alle besonderen Züge, welche die unausgeglichenen Daten darbieten, in der Ausgleichung wiederzugeben; vielmehr ist auf die Forderungen der Praxis entsprechende Rücksicht zu nehmen.

Für die Erlebensversicherungen hat man, wie für die Todesfallversicherungen

1. *select-tables* geordnet nach dem Eintrittsalter und dem Alter zur Zeit der Beobachtung;

2. *aggregate-tables* für alle Versicherungen, die seit mehr wie 5 bzw. 10 Jahren abgeschlossen worden sind.

Bei der Ausgleichung dieser Tafeln mußte als oberstes Ziel eine möglichst genaue Bewertung der Rente zur Zeit des Ankaufs betrachtet werden. Es ist also selbstverständlich, daß für die ersten Jahre Auslesetafeln heranzuziehen sind. Da es sich aber als untunlich erwies, auf die Auslesetafeln für die ersten fünf oder zehn Jahre die mit Weglassung ebenso vieler Jahre konstruierte Gesamttafel folgen zu lassen, so wurde zur Herstellung einer hypothetischen Tafel geschritten, die sich an die unausgeglichene Auslesetafel fünf Jahre nach Ankauf möglichst genau anschließt.[1])

Ein Bild vom Umfang des Beobachtungsmaterials werden folgende Daten geben; die Anzahl der Karten war für die verschiedenen Kombinationen:

1) Vgl. *Czuber, Neuere Sterblichkeitsuntersuchungen an Versicherten,* in Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Bd. 5, 3. Heft.

	Zahl der Karten Männliche Leben	Zahl der Karten Weibliche Leben
Todesfallvers. mit jährl. lebenslängl. konstanter Prämienzahlung	785 222	62 362
Gemischte Versicherungen	144 981	6 798
Renten	9 700	24 300
Todesfallvers. gegen einmalige oder begrenzte Prämienzahlung	39 019	799
Todesfallvers. mit steigender Prämie	25 535	1 074
Temporäre Kapitalversicherungen	13 731	2 084
Versicherungen verbundener Leben	9 668	7 547
Überlebensversicherungen	3 987	1 552
	1 031 843	106 516
	1 138 359	

Bei den *Sterblichkeitstafeln der Gothaer Lebensversicherungsbank* diente als Zähleinheit die Person, die zugrunde gelegten Gesamtheiten waren die Gothaer Gesamtheiten. Die Beobachtungen erfolgten an drei verschiedenen Terminen: am 31. Dezember 1853 (27 210 Eingetretene und 4519 Todesfälle), am 31. Dezember 1878 (76 986 eingetretene Männer mit 19 999 Todesfällen, und 4759 eingetretene Frauen mit 1539 Todesfällen); die dritte Beobachtung umfaßt 150 594 Personen (46 480 Todesfälle), welche die gesamte Erfahrung der Gothaer Lebensversicherungsbank bis zum Prämientermin 1896 darstellen. Es wurde die Abhängigkeit der Sterblichkeit von der Versicherungssumme, den Versicherungsarten und der freiwilligen und gezwungenen Abkürzung der Versicherungsdauer untersucht. Eine Analyse der Todesursachen und der Sterblichkeit einzelner Berufe war auf Grund des Materials der zweiten Beobachtung vorgenommen worden, das auch zur Feststellung des Einflusses des Geschlechts auf die Sterblichkeit diente.[1][2])

1) *Karup*, *Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank*. Jena 1903.

2) Es fehlt eine Sterblichkeitstafel italienischer Versicherter. Die allgemeine Sterblichkeitstafel der italienischen Bevölkerung, die wir schon erwähnten, ist aus den Erfahrungen der Periode 1876—1887 entstanden. Die Frage ihrer Ausgleichung gab Anlaß zu schätzenswerten

Zu erwähnen sind noch die *Tafeln der 30 amerikanischen Gesellschaften*[1]) die *Tafeln für Holland* von Herrn *van Pesch*[2]) und unter zahlreichen anderen Rentnertafeln die *Deutsche Rentnertafel* für Männer und Frauen (1891), welche auf dem Beobachtungsmaterial von deutschen, österreichischen und schweizerischen Gesellschaften beruht. Zu erwähnen sind noch die von *G. Höckner* herrührenden Tafeln der Alten Leipziger Gesellschaft (A. L.), welche nach Alter und Versicherungsdauer abgestuft sind.

§ 21. Die Zulässigkeit der Bestimmung von Sterbenswahrscheinlichkeiten. Die Dispersionstheorie.

79. Ist das Axiom zulässig, daß für jedes Individuum (x) einer Gesamtheit eine Wahrscheinlichkeit $p(x, x+m)$ dafür besteht, daß es das Alter $x+m$ erreicht? Die Frage soll für uns folgenden Sinn haben: sind die Resultate, zu denen man auf Grund des erwähnten Axioms gelangt, mit denjenigen vereinbar, welche die direkte Beobachtung liefert? Es ist einleuchtend, daß, wenn dies nicht zutrifft, eine aus dem in Rede stehenden Axiom abgeleitete statistische Sterblichkeitstheorie wohl logisch existieren kann (insoweit sie nicht zu Resultaten führt, die sich oder dem Axiom widersprechen), aber auch, daß dieselbe keinen Anwendungswert besitzt.

Wir nehmen an, daß p die konstante Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist, und daß s Versuche gemacht werden.

Arbeiten von *Perozzo*, *Armenante* und anderen, die in dem *Archivio di Statistica* erschienen sind.

In Bearbeitung ist dagegen eine Sterbetafel der österreich-ungarischen Versicherungsgesellschaften, an welcher sämtliche in Österreich-Ungarn tätige Anstalten teilnehmen. Es wird in jeder Gesellschaft und für die gesamte beobachtete Gruppe nicht nur der Einfluß des Alters und des Geschlechts untersucht, sondern auch derjenige der Versicherungskombination und der Versicherungsdauer. Was aber diese Tafel von allen übrigen auszeichnen soll, ist die Herstellung von dreimächtigen Gesamtheiten, um den Einfluß der Geburtszeit festzustellen.

Die Untersuchung erstreckt sich auf 493 741 Männer und 88 213 Karten für Frauen.

1) *System and tables of Life assurance* by *Levi Meech* (1881).

2) *Niederländische Sterblichkeitstafel* 1869—1879, Beiträge des Stat. Inst. 1885.

Es ist dann, wie bekannt

$$\varphi(n) = \binom{s}{n} p^n (1-p)^{s-n}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß E n-mal eintritt, $\overline{s-n}$-mal ausbleibt. Auch haben wir gesehen, daß, falls s sehr groß ist, das Gaußsche Fehlergesetz:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_i^2}, \quad \text{wobei} \quad x_i = \frac{n_i}{s} \; (i = 1, 2, \ldots) \qquad \text{(a)}$$

die Art der Gruppierung der Verhältnisse $\frac{n_1}{s}, \frac{n_2}{s}, \ldots \frac{n_\nu}{s}$, welche das Vorkommen von E in jeder einzelnen aus s Versuchen bestehenden Versuchsreihe bestimmen, um ihren wahrscheinlichen Wert

$$n = sp$$

definiert.
Dabei hat h den Wert:

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2sp(1-p)}}.$$

Wir bezeichnen die durch (a) definierte Art der Gruppierung als die *normale Dispersion* und führen ein die Ausdrücke *übernormale* und *unternormale Dispersion*, um Gruppierungen zu bezeichnen, bei welchen die Abweichungen größer oder kleiner sind, als diejenigen, die der normalen Dispersion entsprechen.

Praktisch läuft diese Prüfung darauf hinaus, daß man untersucht, ob der mittlere Fehler, bzw. der durchschnittliche Fehler (bzw. die Präzision) größer oder kleiner (bzw. kleiner oder größer) sind, als diejenigen, die man finden würde, falls *ceteris paribus* der betrachteten Versuchsreihe eine konstante Wahrscheinlichkeit zugrunde läge.

Bezeichnet also m den durch (a) definierten theoretischen mittleren Fehler

$$m = \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}} \qquad (75)$$

und bezeichnet μ den aus den wirklich vorgekommenen Abweichungen bestimmten Wert desselben:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{n_i}{s} - p_0\right)^2\right]}{\nu - 1}}$$

wobei

$$p_0 = \frac{n_1 + n_2 + \cdots n_\nu}{\nu \cdot s}$$

ist, und setzt man

$$Q = \frac{\mu}{m},$$

so hat man normale, übernormale oder unternormale Dispersion, je nachdem $Q = 1$, $Q > 1$ oder $Q < 1$ ist.

Im Falle, wo p unbekannt ist, werden wir es in der Gleichung (75) durch p_0 zu ersetzen haben. Die drei Dispersionstypen sind also durch die Gleichung, bzw. durch die Ungleichungen definiert:

$$\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s}} = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{n_i}{s} - p_0\right)^2\right]}{\nu - 1}}$$

$$\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s}} \lessgtr \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{n_i}{s} - p_0\right)^2\right]}{\nu - 1}}.$$

80. Das hier abgeleitete Kriterium wird in dem Falle anwendbar sein, wo die ν Versuchsreihen aus einer annähernd gleichen Anzahl von Versuchen bestehen. Sind dagegen die Versuchszahlen $s_1, s_2, \ldots s_\nu$, die den einzelnen Reihen entsprechen, beträchtlich voneinander verschieden, so wird man in Betracht zu ziehen haben, daß den Quotienten

$$\frac{n_1}{s_1}, \ldots, \frac{n_\nu}{s_\nu}$$

verschiedene eben durch $s_1, s_2, \ldots s_\nu$ ausgedrückte Gewichte entsprechen.

Gemäß Kap. I, § 5, S. 45 erhalten wir

$$\sqrt{\frac{\left[s_i\left(\frac{n_i}{s_i} - p_0\right)^2\right]}{\nu - 1}}$$

als mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1, d. h. dem Falle $s = 1$ entsprechend, so daß man haben wird:

$$Q = \sqrt{\frac{\left[s_i\left(\frac{n_i}{s_i} - p_0\right)^2\right]}{(\nu - 1)p_0(1-p_0)}}$$

Dabei ist natürlich für p_0 der Wert

$$p_0 = \frac{n_1 + n_2 + \cdots n_\nu}{s_1 + s_2 + \cdots s_\nu}$$

eingesetzt zu denken.

Die Größe Q nennt *Lexis* „Divergenzkoeffizient“ und von *Bortkievicz* „Fehlerrelation“.

81. Die Frage, ob eine bestimmte Erscheinung als Ausdruck einer konstanten Wahrscheinlichkeit betrachtet werden darf, wird also auf die andere zurückgeführt, ob ihr die normale Dispersion entspricht.

Läßt sich dies bezüglich der Sterblichkeit behaupten?

Die ersten Untersuchungen von *Dormoy* und von *Lexis* schienen die Frage entschieden zu verneinen.

Denn der erste der genannten Forscher bestimmte für das Verhältnis der jährlichen Zahl der Sterbefälle zu der gesamten Bevölkerung eine Fehlerrelation, die gleich 8, 6 in der Periode 1849—1858 und gleich 6, 3 in der Periode 1859—1868 ist. *Dormoy* hat aber übersehen, daß die Bestimmung einer allen Altern gemeinsamen Fehlerrelation der Annahme der Existenz einer Sterbenswahrscheinlichkeit widerspricht, welche Funktion des Alters ist: seinen Untersuchungen darf also kein Beweiswert zugesprochen werden.

Dagegen bleiben unanfechtbar die Untersuchungen von *Lexis,* welcher für die belgische Bevölkerung und das Alter 0 einen Koeffizienten bestimmte, der ungefähr 9 ist.

Modernere und vollständigere Untersuchungen des holländischen Statistikers *Peek* bestätigen zwar die Richtigkeit der Lexisschen Resultate, lassen aber ganz andere Schlüsse betreffs der von der Sterblichkeit aufgewiesenen Dispersion zu.

Peek[1]) bedient sich der Daten der vorzüglichen holländischen demographischen Statistik und bestimmt die Fehlerrelation für jedes ganzzahlige Alter und für die zehnjährige Periode 1880 bis 1889.

1) *Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung* von Dr. *J. H. Peek* in der Zeitschrift für Versicherungsrecht und Wissenschaft, Bd. V, 1899, S. 169.

So findet er z. B. für die Alter:

Alter x	Fehlerrelation Q	Alter x	Fehlerrelation Q
0	6,46	20	1,25
1	4,57	30	1,28
2	3,68	40	1,43
3	3,84	50	1,56
5	2,52	60	1,12
7	1,84	70	2,24
9	1,19	80	0,97
10	0,82	90	0,81

Während also den ersten Altersstufen eine entschieden übernormale Dispersion entspricht, schwankt nachher die Fehlerrelation um die Einheit, ohne von ihr zu stark abzuweichen; die dadurch definierte Dispersion läßt sich also als normal betrachten.

Interessanter für uns ist hier die Betrachtung der Dispersion, welche Gesamtheiten Versicherter aufweisen.

Bohlmann nahm in dem Göttinger Versicherungsseminar die Untersuchungen von Peek wieder auf und bestätigte ihre Richtigkeit auch für die deutsche Bevölkerung, indem er die Dispersionskoeffizienten aus den Erfahrungen der „Gothaer“ und der „Leipziger“ bestimmte.

Die Daten, die er mitteilt[1]), sind die folgenden:

Gothaer (1869—1880)		**Leipziger** (1880—1894)	
Alter x	Fehlerrelation Q	Alter x	Fehlerrelation Q
26—30	0,8	$21\frac{1}{2}$—$25\frac{1}{2}$	0,9
31—35	0,8	$26\frac{1}{2}$—$30\frac{1}{2}$	1,0
36—40	1,3	$31\frac{1}{2}$—$35\frac{1}{2}$	1,8
41—45	0,9	$36\frac{1}{2}$—$40\frac{1}{2}$	1,5
46—50	0,9	$41\frac{1}{2}$—$45\frac{1}{2}$	1,1
51—55	0,8	$46\frac{1}{2}$—$50\frac{1}{2}$	0,8
56—60	1,2	$51\frac{1}{2}$—$55\frac{1}{2}$	1,2
61—65	1,0	$56\frac{1}{2}$—$60\frac{1}{2}$	1,1
66—70	1,0	$61\frac{1}{2}$—$65\frac{1}{2}$	0,9
71—75	1,1	$66\frac{1}{2}$—$70\frac{1}{2}$	0,9
76—80	1,2	$71\frac{1}{2}$—$75\frac{1}{2}$	1,0
81—85	1,1	$76\frac{1}{2}$—$80\frac{1}{2}$	1,1
86 90	1,1	$81\frac{1}{2}$—$85\frac{1}{2}$	1,1

1) In *Klein und Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik*, Seite 142.

Ebenfalls normale Dispersion hat *Blaschke* für die englischen Versicherten nachgewiesen. Unter seiner Leitung haben die Hörer des Versicherungskursus der Wiener technischen Hochschule Untersuchungen über den Dispersionskoeffizienten an der Tabelle H^M angestellt und gefunden[1]):

Alter x	Fehlerrelation Q	Alter x	Fehlerrelation Q
25	0,67	50	0,95
30	1,43	55	1,07
35	1,09	60	1,17
40	1,04	65	0,83
45	1,41	70	0,91

Wenn es also auch nicht völlig begründet ist, die Frage der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Lebensversicherungsmathematik entschieden zu bejahen, so scheinen doch die vorhergehenden Untersuchungen (jedenfalls wenn man die ersten Altersstufen ausschließt) eher eine bejahende als eine verneinde Antwort zuzulassen.

Kapitel III.

Ableitung einiger Formeln der politischen Arithmetik.

§ 1. Zinsformeln.

1. Es sei i der Zins des Kapitals 1 in der Zeiteinheit (im Jahr), und es werde angenommen, daß die am Ende jeder Periode von m Jahren fällig gewordenen Zinsen zu dem Kapital hinzugefügt, und von da ab in derselben Weise, wie das ursprüngliche Kapital, weiter verzinst werden. Der Betrag des Kapitals am Ende einer Verzinsungsperiode von $n = km$ Jahren $(k = 1, 2, \ldots)$ ist dann:

$$(1 + mi)^k \tag{1}$$

und am Ende von $n = km + r$ Jahren $(r < m)$:

$$(1 + mi)^k (1 + ri). \tag{2}$$

1) *Vorl. über Math. Statistik*, Seite 144.

Für $m = 1$ wird der Ausdruck (2) zu

$$(1 + i)^k (1 + ri)$$

oder, falls wir näherungsweise $1 + ri$ mit $(1 + i)^r$, $(r < 1)$ identifizieren und $n + r$ durch n ersetzen:

$$(1 + i)^n. \tag{3}$$

Der Ausdruck liefert den Betrag des Einheitskapitals nach einer Periode von n Jahren (wobei n eine ganze oder eine gebrochene Zahl ist), in dem Falle, wo die Verzinsungsform die sogenannte zusammengesetzte Verzinsung ist.

Man erhält aus der Formel (2), falls man m durch $\frac{1}{m}$ ersetzt, so daß $nm = k + rm$ ist:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m(n-r)} (1 + i)^r$$

oder:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm},$$

falls die Gleichung (3) sowohl für ganze als für gebrochene Werte von k gilt. Ist dagegen die Verzinsungsform die durch (1) definierte, und ist $k = 0$, so hat man:

$$1 + ri, \tag{4}$$

d. h. man hat die sogenannte einfache Verzinsung, welche immer da gilt, wo die Verzinsungsperiode r kürzer ist, als die Kapitalisationsperiode.

2. Es ist

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m > 1 + i.$$

Wir fragen nach der Größe $j_{(m)}$, welche der Gleichung genügt:

$$\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i$$

und den Zinsfuß ausdrückt, der bei m-maliger Fälligkeit der Zinsen während eines Jahres dem jährlichen Zinsfuße i entspricht. Die Auflösung ergibt:

$$j_{(m)} = m\left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]. \tag{5}$$

Ersetzen wir m durch $\frac{1}{m}$, so erhalten wir:

$$j_{\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m}\left[(1+i)^m - 1\right]$$

als Ausdruck des Zinsfußes $j_{\left(\frac{1}{m}\right)}$, der bei einfacher Verzinsung am Ende von m Jahren denselben Betrag liefert, wie der jährliche Zinsfuß i bei zusammengesetzter Verzinsung.

3. Man bekommt aus der Gleichung (5), durch einen Grenzübergang:

$$\lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right) = 1 + i$$

oder, da

$$\lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x:$$

$$\lim_{m=\infty} e^{j(m)} = 1 + i:$$

$\lim\limits_{m=\infty} j_{(m)}$ bezeichnen wir mit δ und nennen es die Verzinsungsintensität. Aus

$$e^{\delta} = 1 + i, \tag{6}$$

folgt

$$\delta = \log(1 + i), \tag{6'}$$

falls log den natürlichen Logarithmus bedeutet, und allgemein

$$e^{\delta n} = (1 + i)^n.$$

Es ist $e^{\delta n} > (1+i)^n$, also auch $\delta < i$, was übrigens einleuchtend ist.

4. Der Hypothese eines konstanten Zinsfußes entspricht das identische Bestehen der Gleichung in x und y

$$\frac{C_{x+y}}{C_x} = \frac{C_y}{C_0},$$

wobei C_t den Betrag des Kapitals C_0 am Ende der Zeit t bezeichnet. Setzen wir also

$$\varphi(t) = \frac{C_t}{C_0}$$

und bemerken, daß

$$\frac{C_{x+y}}{C_x} = \frac{C_{x+y}}{C_0} \cdot \frac{C_0}{C_x} = \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)},$$

so werden wir offenbar schreiben können:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y). \tag{7}$$

Es werde nach den „stetigen" Lösungen der Funktionalgleichung (7) gefragt. Um diese zu finden, logarithmieren wir beide Glieder derselben; wird

$$\log \varphi(t) = \psi(t) \tag{8}$$

geschrieben, so wird sie zu

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y),$$

eine Gleichung, die zuerst *Cauchy* löste, und deren einzige stetige Lösung bekanntlich[1])

$$\psi(t) = \delta t$$

ist, wobei δ eine Konstante ausdrückt. Es ergibt sich aus der Beziehung (8), daß

$$\varphi(t) = e^{\delta t}$$

die gesuchte allgemeine stetige Lösung der Gleichung (7) ist.

---

1) Es ist $\psi(x+0) = \psi(x) = \psi(x) + \psi(0)$, also $\psi(0) = 0$. Ferner hat man

$$\psi(0) = \psi(x-x) = \psi(x) + \psi(-x) = 0, \quad \psi(x) = -\psi(-x)$$

$$\psi(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_n)$$

und für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$, bzw. für $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1$, $m = n$

$$n\,\psi\left(\frac{1}{n}\right) = \psi(1), \quad \text{bzw.} \quad \psi(m) = m \cdot \psi(1).$$

Kombiniert man beide Gleichungen, so findet man leicht, daß allgemein

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\,\psi(1) = \frac{m}{n}\,\delta$$

ist, falls $\psi(1) = \delta$ gesetzt wird. Ist nun x beliebig, und $\frac{m}{n} < x < \frac{m'}{n'}$, so ist auch

$$\frac{m}{n}\,\delta < \psi(x) < \frac{m'}{n'} \cdot \delta.$$

Die Differenz $\delta\left(\frac{m'}{n'} - \frac{m}{n}\right)$ können wir beliebig klein machen: wegen der postulierten Stetigkeit von $\psi(x)$ wird $\psi(x)$ beliebig wenig von $\delta \cdot x$ abweichen, und es wird für $\lim \frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$ sein:

$$\psi(x) = \delta \cdot x.$$

5. Der kontinuierlichen Verzinsung kommt eine bemerkenswerte Eigenschaft zu.

Machen wir uns von der Hypothese eines konstanten Zinsfußes frei, und nehmen wir an, daß der Zinsfuß in der Zeit variiert, und zwar so, daß er in den ersten n_1 Jahren gleich δ_1, nach n_1 Jahren bis zur Zeit $n_1 + n_2$ gleich $\delta_2, \ldots$ nach $n_1 + n_2 + \cdots n_{k-1}$ Jahren bis zur Zeit $n_1 + n_2 + \cdots n_k$ gleich δ_k ist.

Ist C_0 der anfängliche Betrag des Kapitals, C_n der Betrag zur Zeit n, so ist

$$C_{n_1} = C_0 e^{\delta_1 n_1}, \quad C_{n_1+2} = C_{n_1} \cdot e^{\delta_2 \cdot n_2} = C_0 \cdot e^{n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2}$$
$$C_{n_1 + n_2 + \cdots n_k} = C_0 \cdot e^{n_1 \delta_1 + n_2 \cdot \delta_2 + \cdots n_k \cdot \delta_k}.$$

Wird

$$n = n_1 + n_2 + \cdots n_k$$
$$\delta = \frac{n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2 + \cdots + n_k \cdot \delta_k}{n_1 + n_2 + \cdots n_k} \tag{9}$$

gesetzt, so ist

$$C_n = C_0 \cdot e^{n \delta}.$$

Auch im Falle eines diskontinuierlich variierenden Zinsfußes läßt sich die Formel anwenden, die der Hypothese eines konstanten Zinsfußes entspricht; als Zinsfuß ist das arithmetische Mittel aus den verschiedenen Zinsfüßen einzusetzen.

Der Fall, daß sich der Zinsfuß kontinuierlich ändert, ist in diesem als spezieller Fall enthalten. Wir brauchen nur

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_k, \quad \lim k = \infty$$

vorauszusetzen; dann geht Gleichung (9) in

$$\delta = \frac{\int_0^n \delta(t)\,dt}{\int_0^n dt} = \frac{\int_0^n \delta(t)\,dt}{n}$$

über, wobei $\delta(t)$ die Größe des Zinsfußes zur Zeit t bezeichnet. Die Beziehung

$$C_t = C_0 \cdot e^{\int_0^t \delta(t)\,dt} \tag{10}$$

ist uns aus der Einleitung bekannt.

Damit Gleichung (10) ihre Bedeutung behält, ist nicht notwendig, daß $\delta(t)$ eine stetige Funktion der Zeit ist; sie braucht

nur „integrabel" zu sein, was durch die Natur des Problems gegeben ist.

Behandeln wir folgende Aufgabe[1]):

Es werde nach dem Betrage von 5000 M. nach 15 Jahren gefragt, falls die Verzinsung kontinuierlich und

$$\delta(t) = 0{,}09 + 0{,}01\,e^{-t}$$

ist.

Der Zinsfuß ist anfangs gleich 0,04 und nähert sich rasch dem Werte 0,03; man hat, für $t = 15$

$$\delta(15) = 0{,}03000000306$$

$$\int_0^{15} \delta(t)\,dt = \int_0^{15} 0{,}03\,dt + 0{,}01 \int_0^{15} e^{-t}\,dt$$
$$= 0{,}45 - 0{,}01\,\frac{e^{-15} - 1}{1}$$
$$C_{15} = 5000 \cdot e^{0{,}46 - 0{,}01 e^{-15}}.$$

Die Größe

$$e^{-0{,}01 \cdot e^{-15}} = e^{0 \cdot 00000000306},$$

die von der Einheit sehr wenig abweicht, können wir vernachlässigen, und annehmen:

$$C_{15} = 5000 \cdot e^{0 \cdot 46} = 7920 \cdot 37\,.$$

6. Es sei M der Betrag des Kapitals C am Ende der Zeit n. Wir haben gesehen, daß

$$M = C(1 + ni)$$
$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = C\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$$

ist, je nachdem die Verzinsung einfach oder jährlich und zusammengesetzt, oder zusammengesetzt, aber mit Kapitalisierung der Zinsen am Ende jedes $\frac{1}{m}$ Jahres geschieht.

1) *T. Boggio, Sull'interesse continuo a tasso variabile,* Torino 1906, Seite 11.

Man hat, für $M = 1$

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{1+ni} \\ C &= (1+i)^{-n} \\ C &= \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

als Ausdruck des gegenwärtigen Wertes des Kapitals 1, zahlbar nach n Jahren, unter den Voraussetzungen, daß die Verzinsung einfach, bzw. zusammengesetzt mit jährlicher Kapitalisierung, oder zusammengesetzt mit m-maliger Kapitalisierung der Zinsen im Jahre ist.

Die Differenz

$$1 - C$$

nennen wir den Diskont. Wir werden im folgenden die Notationen einführen:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$d = 1 - v = iv,$$

um den gegenwärtigen Wert des Kapitals 1, zahlbar nach einem Jahr, bzw. den entsprechenden Diskont zu bezeichnen.

Die Gleichung (11) werden wir auch für nicht ganzzahlige Werte von n anwenden.

7. Die Größe i ist normalerweise ein sehr kleiner Bruchteil der Einheit; sie ist bzw. 0,05, 0,04, ... je nachdem der Prozentsatz der Verzinsung 5, bzw. 4 ... ist. Die Bestimmung von $j_{(m)}$, falls i gegeben ist, oder von δ, sowie die Bestimmung von $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$ für negative oder gebrochene Werte von n, kann also mit genügender Annäherung erreicht werden, wenn man in den Reihenentwicklungen der genannten Größen die höheren Glieder vernachlässigt.

So liefert z. B. die Einsetzung von

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{i}{m} - \frac{m-1}{2!\,m^2}\,i^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{3!\,m^3}\,i^2$$

in (5):

$$j_{(m)} = i - \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)i^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)i^3$$
$$-\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)\left(3-\frac{1}{m}\right)i^4 + \cdots \qquad (6'')$$

sowie die Einsetzung der Reihenentwicklung von log $(1+i)$ in $(6')$

$$\delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \cdots. \qquad (6''')$$

Bekanntlich ist der Fehler, den man begeht, indem man von einer Reihe mit alternierenden Vorzeichen alle Glieder vernachlässigt, die dem n^{ten} folgen, kleiner als der absolute Betrag des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes. Wie viele Glieder der Gleichung $(6'')$ bzw. der Gleichung $(6''')$ praktisch zu berücksichtigen sind, läßt sich natürlich im allgemeinen nicht sagen, sondern hängt von der Natur des Problems ab. Setzt man z. B.

$$\delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4},$$

so ist der begangene Fehler für

$\delta = 0{,}04$ kleiner als $0{,}00000002048$

$\delta = 0{,}05$ kleiner als $0{,}0000000625$,

also verschwindend klein. Die alleinige Betrachtung der drei ersten Glieder, oder für manche Zwecke sogar die Annahme

$$\delta = i\left(1 - \frac{i}{2}\right) \qquad (6'''')$$

kann genügend sein. Es ist

$\delta = 0{,}0487902$ für $i = 0{,}05$

$\delta = 0{,}0392207$ für $i = 0{,}04$

$\delta = 0{,}0295588$ für $i = 0{,}03$

die Gleichung (6) liefert beziehungsweise für δ die Werte:

für $i = 0{,}05$ den Wert $0{,}04875$

für $i = 0{,}04$ den Wert $0{,}03920$

für $i = 0{,}03$ den Wert $0{,}02955$.

§ 2. **Renten.**

8. Als Rente definieren wir jede periodisch wiederkehrende Zahlung. Wir unterscheiden von den immerwährend zahlbaren oder ewigen Renten die temporären, von den pränumerando zahlbaren, d. h. von denjenigen, die immer am Beginne des Jahres (bzw. des Monats, des Vierteljahres, des Halbjahres, demgemäß

werden wir von monatlichen, vierteljährlichen, halbjährlichen Renten reden) bezahlt werden, die postnumerando zahlbaren, deren Zahlung am Ende jeder Periode stattfindet; von den unmittelbar zu leistenden Renten die aufgeschobenen; von den Tilgungsrenten, die geleistet werden, um eine ursprünglich existierende Schuld zu tilgen, diejenigen Renten, welche kapitalisiert ein Kapital am Ende einer bestimmten Zeit liefern.

Ist der Betrag der Rente konstant, so ist ihr Wert gleich der Summe der Glieder einer geometrischen Progression. Man hat somit als gegenwärtigen Wert einer unmittelbaren postnumerando zahlbaren Rente, vom Betrag 1, der n mal geleistet wird:

$$v + v^2 + \cdots + v^n = v\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{i} \tag{12}$$

oder, falls die Rente pränumerando zahlbar ist:

$$1 + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}. \tag{13}$$

Wird allgemein der Wert der Rente bezogen auf das Ende einer Zeitstrecke, die durch die Zahl h gemessen wird, so werden Formel (12) bzw. Formel (13) zu

$$(1+i)^h\frac{1-v^n}{i}$$

$$(1+i)^h\frac{1-v^n}{d},$$

die mit den genannten Formeln für $h = 0$ übereinstimmen. Setzen wir dagegen $h = n$, so haben wir den Wert der Rente, bezogen auf das Ende des Jahres, in welchem die letzte Zahlung stattfindet. Der pränumerando, bzw. der postnumerando zahlbaren Rente entsprechen in diesem Falle die Ausdrücke

$$\frac{r^n-1}{i},$$

bzw.

$$\frac{r^n-1}{d},$$

wobei

$$r = 1 + i$$

gesetzt worden ist.

9. Findet die Zahlung der Kapitalseinheit m-mal im Jahre statt, so werden die Ausdrücke (12) und (13) zu

$$v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^n = v^{\frac{1}{m}}\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}$$

$$1 + v^{\frac{1}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}} = \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}.$$

10. Es sei $n = \infty$. Es ist, falls wir den Wert der Rente mit a_∞ bezeichnen:

$$a_\infty = \lim_{n=\infty}\frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i} - \lim_{n=\infty}\frac{1}{i(1+i)^n} = \frac{1}{i}, \tag{14}$$

d. h. der Wert einer postnumerando zahlbaren ewigen Rente ist gleich dem reziproken Werte des Zinsfußes i; er nimmt also ab mit dem Wachsen von i, und zwar desto rascher, je kleiner i ist. Dies folgt aus

$$\frac{d\left(\frac{1}{i}\right)}{di} = -\frac{1}{i^2} < 0, \qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{i}\right)}{di^2} = \frac{2}{i^3} > 0.$$

Der Beweis der übrigens unmittelbar einleuchtenden Tatsache, daß auch im Falle eines endlichen n der Wert V einer Rente eine abnehmende Funktion des Zinsfußes ist, ergibt sich leicht, wenn man bemerkt, daß

$$V = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$
$$= n - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}i + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}i^2 - \cdots$$

$$\frac{dV}{di} = -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 3}i - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 4}i^2 + \cdots.$$

Das Vorzeichen der konvergenten Reihe, die $\frac{dV}{di}$ ausdrückt, stimmt mit dem Vorzeichen ihres ersten Gliedes überein, woraus sich

$$\frac{dV}{di} < 0$$

ergibt. Wir finden, indem wir von neuem ableiten, daß

$$\frac{d^2V}{di^2} > 0$$

ist. Wie bei den ewigen Renten ist bei den temporären die Raschheit des Abnehmens des Wertes V mit dem Wachsen von i eine abnehmende Funktion des Zinsfußes.

11. Mit der Untersuchung über das Variieren der Funktion V des Arguments i kann das Problem der Bestimmung von i aus der Gleichung

$$V = \frac{1 - v^n}{i}$$

verknüpft werden, die wir offenbar in der Form schreiben können

$$V = \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$$

$$Vr^{n+1} - (V+1)r^n + 1 = 0\,, \tag{15}$$

wobei, wie gewöhnlich, $r = 1 + i$ ist.

Es ist sehr oft praktisch zweckmäßig, i durch Interpolation zwischen solchen Werten V zu bestimmen, welche dem gegebenen n entsprechen, und teils größer, teils kleiner sind als der Wert V, der als Koeffizient in der Gleichung (15) auftritt.

Es ist nun vorzuziehen, die Interpolation nicht auf Grund der Werte V selbst auszuführen, sondern auf Grund ihrer reziproken Werte.

Für die ewigen Renten folgt unmittelbar aus (14), daß einer arithmetischen Reihe von Werten V eine harmonische Reihe von Werten i entspricht, und daß umgekehrt dem arithmetischen Mittel aus den Werten der einen Reihe, das harmonische Mittel aus den Werten der zweiten entspricht.

Nur sind die durch die Gleichungen

$$Vr - (v+1) = 0$$

(die $n = \infty$ entspricht), und

$$Vr^{n+1} - (V+1)r^n + 1 = 0$$

definierten Kurven konvex gegen die Achse der i und asymptotisch zur Achse selbst. Sie haben — wenn man von absolut sehr kleinen Werten von i absieht — Verläufe, welche im großen ganzen als übereinstimmend gelten können.

Schon die einfache lineare Interpolation zwischen $\frac{1}{V_1}$ und $\frac{1}{V_2}$, $(V_1 < V < V_2)$, wo V_1 und V_2, bzw. den Werten i_1 und i_2 von i entsprechen, liefert einen V entsprechenden Wert von i, welcher für

$$i_2 - i_1 = h \leqq 0{,}005$$

schon genügend angenähert ist. Sie liefert

$$i = i_1 - \frac{i_1 - i_2}{\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}}\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_1}\right).$$

Für größere Intervalle $i_2 - i_1$, $i_3 - i_2, \ldots$ ist dagegen die Interpolation mittels Parabeln zweiten und höheren Grades erforderlich.

Die Existenz von Tafeln, welche die Werte V liefern, die zu den Werten $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $i = i_0, i_1, i_2, \ldots$ gehören — wo die Differenzen $i_1 - i_0 = i_2 - i_1 = \cdots$ gleich 0,0025, bzw 0,00125 sind — vereinfacht praktisch die Lösung der gestellten Aufgabe, und erlaubt sich mit der Anwendung der linearen Interpolation zu begnügen.

12. Die Gleichung (15)

$$Vx^{n+1} - (V+1)x^n + 1 = 0$$

ist trinomisch. Wir können sie auflösen und damit $i = x - 1$ bestimmen, indem wir die von Gauß angegebenen Methoden zur Auflösung trinomischer Gleichungen anwenden; dies wird uns gleichzeitig Gelegenheit bieten, den Gebrauch von Tabellen der Additionslogarithmen, die auch bei anderen Problemen eine nützliche Verwendung finden, durch Beispiele zu illustrieren.

Es folgt aus der Cartesischen Zeichenregel, daß (15) eine positive Wurzel außer $x = 1$ hat; eine solche Wurzel wird auch größer sein, als die Einheit, falls, wie die Natur des Problems verlangt, die Ungleichungen gelten $n > V > 0$.

Wir setzen

$$t = x\sqrt[n+1]{V}, \quad \lambda = V^m(V+1)^{-(n+1)},$$

so daß Gleichung (15) wird:

$$t + t^{-n} = t(1 + t^{-(n+1)}) = \lambda^{-\frac{1}{n+1}}$$

oder, falls wir schreiben

$$A = \log t^{-(n+1)}, \quad B = \log(1+t)^{-(n+1)}$$

$$-A + (n+1)B = -\log\lambda\,.$$

13. Ähnlich werden wir die Gleichung lösen:

$$x^m - \mu x + (\mu - 1) = 0,$$

welche dem Problem der Bestimmung von $i = x - 1$ entspricht. falls der Betrag μ von m postnumerando zahlbaren Annuitäten am Ende der Zeit m bekannt ist.

Wir setzen hier

$$x = t\sqrt[m]{\mu - 1}, \quad \lambda = (\mu - 1)^{m-1}\mu^{-m}$$

und bekommen

$$t^{m-1} + t^{-1} = \lambda^{-\frac{1}{m}}$$

oder, falls

$$A = \log t^m, \quad B = \log (1 + t^m)$$

ist,

$$-A + mB = -\log \lambda.$$

Damit eine positive Wurzel $x > 1$ existiert, muß $\mu > m$ sein.

14. In beiden Fällen ist das Problem auf die Lösung einer Gleichung der Form

$$\pm mA \pm nB = \text{konst.}$$

reduziert. Dabei sind m und n positive Zahlen, die nicht notwendig ganze Zahlen zu sein brauchen und B ist die durch die Tabelle der Additionslogarithmen gelieferte Funktion von A. Wir geben hier einen kurzen Auszug aus solchen Tabellen an, der für eine erste rohe Bestimmung der Wurzeln mit Vorteil angewandt werden kann.

A	B	A	B	A	B
0	0,301	9,0	0,041	8,0	0,004
9,9	0,254	8,9	0,033	7,9	0,003
9,8	0,212	8,8	0,027	7,8	0,003
9,7	0,176	8,7	0,021	7,7	0,002
9,6	0,146	8,6	0,017	7,6	0,002
9,5	0,119	8,5	0,014	7,6	0,001
9,4	0,097	8,4	0,011	7,4	0,001
9,3	0,079	8,3	0,009	7,3	0,0009
9,2	0,064	8,2	0,007	7,2	0,0007
9,1	0,051	8,1	0,005	7,1	0,0006
9,0	0,041	8,0	0,004	7,0	0,0004

Als Beispiel wollen wir folgendes Problem behandeln:

Es soll eine Rente, nachdem sie zum 100. Male gezahlt ist, auf den 200fachen Wert ihres Betrages angewachsen sein. Welcher Zinsfuß ist zugrunde zu legen?[1])

1) Wir entnehmen dieses Beispiel der *„Praxis der Gleichungen"* von *C. Runge* (Leipzig 1900, S. 147).

Es ist

$$x^{100} - 200x + 199 = 0$$

$$\log 199 = 2.298853; \quad \log 199^{99} = 227.5864$$

$$\log 200 = 2.301030; \quad \log 200^{100} = \underline{230.1030}$$

$$\log \lambda^{-1} = \quad 2.5166$$

und, indem wir

$$A = \log t^{100}$$

setzen,

$$-A + 100B = 2.5166.$$

Die kleine Tabelle liefert:

A	$-A + 100B$	Fehler
8,0	2,4	− 0,1166
8,1	2,4	− 0,1166
8,2	2,5	− 0,0166
8,3	2,6	+ 0,0834

Eine genauere Rechnung gibt:

A	$-A + 100B$	Fehler
8,20	2,4829	− 0,0337
8,23	2,5013	− 0,0153
8,25	2,5155	− 0,0011
8,26	2,5232	+ 0,0066

woraus, indem man linear interpoliert:

$$A = 8{,}25 + \frac{11}{77} = 8.2514.$$

Es ist also

$$\log t^{100} = 8.2514$$

$$\log x^{100} = \log t^{100} + \log 199 = 0.5503$$

$$\log x = 0.005503$$

$$x = 1.01275.$$

Der gesuchte Zinsfuß ist 0,01275.

Die direkte Rechnung liefert

$$1{,}01275^{99} + 1{,}01275^{98} + \cdots + 1 = \frac{1{,}01275^{100} - 1}{0{,}01275} = 208.3$$

der richtige Zinsfuß ist 0,1274, der Rechnungsfehler ist also $\frac{1}{100000}$. Die Benutzung von Tabellen mit einer größeren Anzahl von Stellen hätte natürlich erlaubt, eine größere Genauigkeit zu erreichen.

15. Es ist im Hinblick auf praktische Zwecke von Interesse, linear veränderliche Renten zu betrachten.

Es sei $\frac{1}{m}$ der anfängliche Betrag einer Rente, zahlbar am Ende der ersten Periode $\frac{1}{m}$; er vermehre sich um $\frac{1}{m}$ bis zur Erreichung des Betrages n am Ende der Zeit n, wo die Rentenzahlung aufhört.

Der Wert V ist offenbar ausgedrückt durch

$$\frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{2}{m} v^{\frac{2}{m}} + \frac{mn}{m} v^n = V$$

$$= \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} \left\{ 1 + 2 v^{\frac{2}{m}} + 3 v^{\frac{3}{m}} + \cdots + nmv^{\frac{nm-1}{m}} \right\}. \tag{16}$$

Aus

$$1 + x + \cdots x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

folgt durch Ableitung beider Glieder:

$$1 + 2x + \cdots + kx^{k-1} = \frac{1 - (k+1)x^k + kx^{k+1}}{(1-x)^2}. \tag{17}$$

Setzen wir in die Gleichung (17) den von der Gleichung (16) für $k = mn$, $x = v^{\frac{1}{m}}$ gelieferten Wert ein, so folgt nach einfacher Umformung

$$V = \frac{v^{\frac{1}{m}} - \left\{1 + nm\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)\right\} v^{n+\frac{1}{m}}}{m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)^2}. \tag{18}$$

$m = 1$ entspricht die Annahme einer postnumerando zahlbaren jährlichen Rente, die jährlich um 1 von 1 zu n wächst; Gleichung (18) wird in diesem Falle zu

$$V = \frac{v - (1 + nd) v^{n+1}}{d^2}. \tag{19}$$

Hätten wir den Wert der Rente nicht auf die Anfangszeit, sondern auf die Endzeit bezogen, so wären (18) und (19) durch

$$V = \frac{r^{-\frac{1}{m}+n} - v^{\frac{1}{m}} - nm\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right) v^{\frac{1}{m}}}{m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)^2}, \tag{20}$$

bzw.

$$V = \frac{r^n - 1 - nd}{i^2 v} \tag{21}$$

zu ersetzen gewesen, wie aus der Multiplikation mit r^n folgt; die Multiplikation mit $r^{\frac{1}{m}}$, bzw. mit r würde den gegenwärtigen Wert pränumerando zahlbaren Renten liefern.

16. Das Problem der Bestimmung des Wertes einer linear um $\frac{1}{m}$ von $\frac{nm}{m}$ zu $\frac{1}{m}$ abnehmenden Rente, wird auf den eben betrachteten Fall zurückgeführt, indem man berücksichtigt, daß

$$\frac{nm}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{nm-1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm+1}{n}}$$

$$= \frac{1}{m} v^{n+\frac{1}{m}} \left\{ nmr^{\frac{nm}{m}} + (nm-1) r^{\frac{nm-1}{m}} + \cdots 2 r^{\frac{2}{m}} + r^{\frac{1}{m}} \right\}$$

ist.

Man findet als Ausdruck des gesuchten Wertes

$$\frac{v^n + nm\left(v^{-\frac{1}{m}} - 1\right) - 1}{m\left(v^{-\frac{1}{m}} - 1\right)^2} \tag{22}$$

und

$$\frac{v^n + ni - 1}{i^2}, \tag{23}$$

falls $m = 1$.

Zweiter Abschnitt.

Die fundamentalen Probleme der Lebensversicherungsmathematik.

Kapitel I.

Die gebräuchlichen Rechnungsmethoden.

§ 1. Einleitende Bemerkungen.

1. Der Lebensversicherungsmathematik ist das Problem eigen, den Wert einer Leistung vom Betrage S zu bestimmen, die am Ende der Zeit n in dem Falle erfolgen soll, daß ein bestimmtes Individuum oder bestimmte Individuen noch leben, bzw. daß ein bestimmtes Individuum oder bestimmte Individuen im Laufe der Zeit n absterben, bzw. daß von den Individuen, aus denen eine gewisse Gesamtheit besteht, einige (die definiert oder nicht definiert sein können) verstorben sind, die übrigen dagegen noch leben.

Wir nennen Versicherungsoperation eine Operation, die sich auf ein solches Schema zurückführen läßt, Versicherte die Individuen, von deren Absterben, bzw. von deren Überleben die Leistung der Summe S abhängt, Versicherer denjenigen, der die Summe S zu zahlen hat, und wir werden die Modalitäten, von denen die Leistung abhängig ist, als Unterscheidungsmerkmale einer bestimmten Versicherungsform von allen übrigen annehmen. Als gegeben werden wir einerseits eine bestimmte Überlebenstafel annehmen — mit anderen Worten die Zahl l_x der Überlebenden des Alters x von einer gewissen Gruppe l_0 von Geborenen — und andererseits die Kapitalisations- und Diskontowerte

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}, \quad \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}$$

— wo $\frac{i}{m}$ den Zins des Einheitskapitals für die Zeit $\frac{1}{m}$ ausdrückt.

2. Eine erste Einteilung der Versicherungsoperationen kann auf die Anzahl der Versicherten gegründet werden. Man unterscheidet dann Versicherungen auf einzelne Leben und Versicherungen auf mehrere Leben. Ferner kann man die Versicherungen in Überlebensversicherungen und in Todesfallversicherungen teilen, je nachdem die Leistung vom Überleben oder Absterben der Versicherten abhängt. Diese Einteilung ist auch bei Versicherungen auf einzelne Leben nur scheinbar eindeutig[1]). Im Falle von Gruppen ist sie im allgemeinen überhaupt nicht durchführbar; eine Operation kann als Überlebens- oder Absterbeoperation betrachtet werden, je nachdem man sich auf die einen oder anderen Individuen der versicherten Gruppe bezieht.

3. Schließlich kann man als Unterscheidungsmerkmal die Möglichkeit annehmen, die Bewertung der Leistungen des Versicherers auf Grund der definierten Data durchzuführen, ohne die Bezugnahme auf ergänzende Hypothesen.

Man hat in einer ersten Klasse die Operationen, für welche dies möglich erscheint; in einer zweiten Klasse alle übrigen.

Es ist von vornherein klar, daß zur zweiten Klasse alle Operationen gehören, bei welchen die Kenntnis von Überlebenswahrscheinlichkeiten erfordert wird, die sich auf eine gebrochene Anzahl von Jahren oder auf nicht ganzzahlige Altersstufen beziehen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Individuum (x) des Alters x das Alter $x+n$ erreicht, bzw. im Altersintervall $(x, x+n)$ abstirbt,

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {_nq_x} = 1 - {_np_x},$$

wird von einer Überlebenstafel direkt nur in dem Falle geliefert, wo x und n ganze Zahlen sind: die Anzahl der Überlebenden eines nicht ganzzahligen Alters x kann nur auf Grund einer Hypothese betreffs der Form der Funktion l_x bestimmt werden, die aus den Werten derselben für ganzzahlige Argumente alle übrigen Werte herzuleiten gestattet.

Es folgt daraus, daß zur zweiten Klasse alle die Operationen gehören bei welchen die Leistung der versicherten Summe vom Überleben bzw. vom Nichtüberleben der Versicherten am Ende einer gemischten Zahl von Jahren abhängt. Das Reziproke trifft

1) Vgl. § 2, Nr. 6.

nur für Versicherungen auf einzelne Leben zu; ist die Anzahl der versicherten Individuen größer als die Einheit, so kann die Rechnungsperiode durch eine ganze Anzahl von Jahren ausgedrückt sein, ohne daß es möglich ist, die betreffenden Wahrscheinlichkeiten ohne die Anwendung hinzukommender Hypothesen zu bestimmen. Dies wird allemal dann geschehen, wenn die versicherte Summe in dem Falle bezahlt werden muß, wo im Laufe einer durch eine ganze Anzahl von Jahren ausgedrückten Periode ein Individuum oder bestimmte Individuen, die zu einer Gruppe gehören, vor oder nach anderen Individuen der Gruppe gestorben sind.

Ein einziges Beispiel möge angeführt werden: Die Gruppe (x, y) bestehe aus den Individuen (x) vom Alter x und (y) vom Alter (y) (x und y ganze Zahlen), und es soll die Summe S am Ende des ersten Versicherungsjahres bezahlt werden, falls entweder (y) im Laufe des Jahres verstorben ist, während (x) das Alter $x + 1$ erreicht, oder sowohl (x) wie (y) verstorben sind, aber (y) vor (x).

Die Wahrscheinlichkeiten, daß (x) das Alter $x + 1$ erreicht, bzw. daß (y) im Altersintervall $(y, y + 1)$ stirbt, sind

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_y = \frac{d_y}{l_y},$$

wobei

$$d_y = l_y - l_{y+1},$$

so daß (falls wir die Unabhängigkeit beider Wahrscheinlichkeiten voneinander voraussetzen)

$$p_x q_y = \frac{l_{x+1} d_y}{l_x l_y}.$$

die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses sein wird; sie kann in strenger Weise aus einer Überlebenstafel abgeleitet werden. Anders verhält es sich dagegen mit der zweiten der genannten Wahrscheinlichkeiten; wir können hier nur die Grenzen angeben, innerhalb welcher sie enthalten sein muß.

Die obere Grenze entspricht der Annahme, daß beide Individuen im Laufe des Jahres sterben, gleichgültig in welcher Reihenfolge. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{d_x}{l_x} \frac{d_y}{l_y} = q_x q_y.$$

Die untere Grenze entspricht der Annahme, daß (y) am Ende des Jahres stirbt; damit ist die Möglichkeit ausgeschlossen, daß (x) im Laufe des Jahres und nach (y) abstirbt; der Wert der verlangten Wahrscheinlichkeit ist also Null. Zwischen 0 und $q_x q_y$ können wir, falls die Form der Funktion l_x im Intervalle $(x, x + 1)$ willkürlich bleibt, beliebig interpolieren.

Es ist in der Tat einleuchtend, daß das Problem nicht mit demjenigen identifiziert werden kann, bei dem nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, daß von zwei beliebig auf einer Strecke ausgewählten Punkten A und B sich A auf der linken Seite von B befindet (d. h. daß A vor B kommt).

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $1/2$. Sind in dem uns beschäftigenden Problem die Alter voneinander verschieden, so werden auch die Wahrscheinlichkeiten verschieden sein, daß (x), bzw. (y) eine bestimmte Zeit überlebe. Das Fehlen bestimmter Wahrscheinlichkeiten für Zeitstrecken, die kürzer sind als ein Jahr, berechtigt uns nicht, diese Wahrscheinlichkeiten miteinander zu identifizieren.

4. Daraus folgt aber, daß sich die fundamentalen Wahrscheinlichkeiten nur auf das Vorkommen von Ereignissen in einem endlichen Zeitintervall beziehen, ohne daß es möglich ist, aus ihnen die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Reihenfolge der Ereignisse im Intervalle selbst abzuleiten, und daß wir innerhalb der Grenzen, die den extremen Annahmen über das Vorkommen eines Ereignisses oder bestimmter Ereignisse am Anfang, bzw. am Ende des Intervalls entsprechen, willkürliche Hypothesen bezüglich der Form der betrachteten Funktionen einführen können, welche die Behandlung von sonst unbestimmten Problemen gestatten.

So z. B. können wir die Stetigkeit der fundamentalen Funktionen voraussetzen. Man ersetzt die diskontinuierlichen Funktionen der kontinuierlichen Variabeln (der Zeit) durch andere Funktionen, welche entweder

a) den ersten möglichst nahe kommen, oder

b) die denkbar einfachste Form besitzen

und die mit den ersten die Punkte gemeinsam haben, welche den ganzzahligen Argumenten der Variabeln entsprechen.

Zu a) gehört z. B. die Interpolation nach der Gompertz-Makehamschen Funktion oder einer analogen, die Bestimmung der fundamentalen Wahrscheinlichkeiten und der darauf gegründeten

Versicherungswerte wird dann durch Quadraturen erreicht, und die mit diesen letzteren verbundenen Schwierigkeiten sind die einzigen, die man zu überwinden hat.

Diesen Hypothesen gegenüber steht diejenige der Linearität der betrachteten Funktionen im Innern jedes Intervalls *(de Moivresche Hypothese).*

Oder wir können von jeder Hypothese betreffs der Funktionen absehen, und falls es möglich ist, das kleinste Intervall (a, b) anzugeben, dem die gesuchte Unbekannte x angehören muß,

$$x = \frac{a+b}{2}$$

annehmen *(Cauchysches Prinzip)*, der größtmögliche Fehler wird dadurch zu einem Minimum gemacht.

§ 2. Die Bestimmung der grundlegenden Wahrscheinlichkeiten.

5. Es ist

$$Spv^n,$$

$\left(v = \frac{1}{1+i}\right)$, der Wert einer Summe S, die nach n Jahren und im Falle des Eintretens eines Ereignisses zu leisten ist, dessen Wahrscheinlichkeit gleich p angenommen wird.

Sind c Versicherungen dieser Art abgeschlossen worden (d. h. Versicherungen desselben Betrages, derselben Dauer und von Ereignissen derselben Wahrscheinlichkeit abhängig), so wird die Zahlung der Summe S voraussichtlich für cp Versicherungen stattfinden, so daß Scp die gesamte Auszahlung des Versicherers sein wird; ihr entspricht der gegenwärtige Wert

$$Spcv^n$$

und es wird jeder Operation der Wert

$$Spv^n$$

entsprechen. Bei der Lebensversicherung sollen aus den Daten einer Überlebenstafel

$$l_x,\ l_{x+1},\ l_{x+2},\ \ldots$$

$$l_x - l_{x+1} = d_x,\ d_{x+1},\ d_{x+2},\ \ldots$$

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x,\ p_{x+1},\ p_{x+2}$$

$$1 - p_x = q_x,\ q_{x+1},\ q_{x+2}$$

die Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden, daß am Ende der Zeit n die Summe S geleistet werde.

Allgemeiner: Gehören zu den Werten

$$1, 2, 3, \ldots n$$

von n die Werte

$$S_1, S_2, \ldots S_n$$

von S, und die Werte

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

von p, so wird der durch die S und die Wahrscheinlichkeiten p' definierten Operation der gegenwärtige Wert

$$S_1 p_1 v + S_2 p_2 v^2 + \cdots + S_n p_n v^n$$

entsprechen.

6. Handelt es sich um Versicherungen auf einzelne Leben, so können die Möglichkeiten, von deren Vorkommen die Leistung der Summe S_n am Ende des n^{ten} Jahres an den jetzt x-jährigen Versicherten (x) (x ganzzahlig[1]) abhängig gemacht wird, folgende sein:

a) daß (x) das Alter $x+n$ erreicht,

b) daß (x) im Altersintervall $(x, x+n)$ stirbt, und als besonderer Fall von b):

c) daß (x) im Altersintervall $(x+n-1, x+n)$ stirbt.

Von praktischem Interesse sind nur a) und c); wir bezeichnen die ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten bzw. mit ${}_np_x$ und ${}_{n-1|}q_x$. Es ist

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_{n-1|}q_x = \frac{d_{x+n-1}}{l_x},$$

sowie offenbar

$${}_np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\cdots\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+n-1} \qquad (1)$$

und, falls

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x$$

$${}_nq_x = q_x + {}_{1|}q_x + {}_{2|}q_x + \cdots {}_{n-1|}q_x \qquad (2)$$

$${}_{n-1|}q_x = {}_{n-1}p_x - {}_np_x = {}_{n-1}p_x q_{x+n-1}. \qquad (3)$$

1) Praktisch identifiziert man das wirkliche Alter x' jedes Versicherten mit $e(x')$ oder mit $e(x')+1$, je nachdem $x' - e(x') \lesseqgtr \frac{1}{2}$ ist. $e(x)$ ist die größte in x enthaltene ganze Zahl.

Nach der vorherigen Definition hätte man Erlebensversicherung, falls $p_n = {}_n p_x$; dagegen Todesfallversicherung, falls

$$p_n = {}_{n-1|}q_x.$$

7. Im Falle von Versicherungen auf mehrere Leben ist die Kasuistik viel komplizierter.

Die Gruppe $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ bestehe aus den m Individuen $(x_1), (x_2), \ldots (x_m)$. Und es sei ${}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach n Jahren alle Individuen der Gruppe noch leben, ${}_n q_{x_1 x_2 \cdots x_m}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach n Jahren alle Individuen der Gruppe verstorben sein werden. Zwischen diesen extremen Hypothesen werden die anderen enthalten sein: daß ein einziges Individuum der Gruppe innerhalb der n Jahre stirbt, ..., daß ein einziges Individuum der Gruppe n Jahre überleben wird.

8. Es werde nach der Wahrscheinlichkeit

$${}_n p \frac{[r]}{x_1, x_2, \ldots, x_m} = P_r \tag{4}$$

gefragt, daß von den m betrachteten Individuen genau r x Jahre überleben.

Es ist

$$\begin{aligned}&{}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_r}\, {}_n q_{x_{r+1} x_{r+2} \cdots x_m} \\ &\qquad = {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_r}(1 - {}_n p_{x_{r+1}})(1 - {}_n p_{x_{r+2}}) \cdots (1 - {}_n p_{x_m})\end{aligned} \tag{5}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die r bestimmten Individuen

$$(x_1), (x_2), \ldots, (x_r)$$

am Ende der Zeit n noch leben, während alle übrigen verstorben sind. Die Summation

$$\sum {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_r}(1 - {}_n p_{x_{r+1}})(1 - {}_n p_{x_{r+2}}) \cdots (1 - {}_n p_{x_m})$$

erstreckt auf alle $\binom{m}{r}$ möglichen Produkte, deren jedes die Wahrscheinlichkeit des Überlebens von r bestimmten Individuen unter den m ausdrückt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit P_r.

Man sieht leicht, daß, während die Produkte, welche die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_n p_{x_1' x_2' \cdots x_r'}$ einer Gruppe von r Individuen ausdrücken, nur ein einziges Mal vorkommen, jedes der Glieder ${}_n p_{x_1' x_2' \cdots x_{r+i}'}$ $(i = 1, 2 \ldots, m - r + 1)$, welche die Überlebenswahrscheinlichkeit einer Gruppe von $r + i$ Individuen darstellen, wiederholt vorkommt. Bezeichnen wir mit A_s die Zahl, welche die Häufigkeit des Vorkommens von ${}_n p_{x_1' x_2' \cdots x_{r+s}'}$ und mit Z_{r+s} die Summation $\Sigma_n p_{x_1' x_2' \cdots x_{r+s}'}$, erstreckt auf alle möglichen $\binom{m}{r+s}$ Kombinationen $\overline{r+s}$-ter Klasse von m Elementen, so wird Gleichung (4) zu

$$P_r = Z_r + A_1 Z_{r+1} + A_2 Z_{r+2} + \cdots + A_{m-r} Z_m \tag{6}$$

$A_1, A_2 \ldots, A_{m-r}$ sind unabhängig von der ${}_n p_{x_i}$. Gleichung (5) wird, falls man annimmt, daß

$${}_n p_{x_1} = {}_n p_{x_2} = \cdots = {}_n p_{x_m} = p$$

$$\left.\begin{aligned}&\binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r} \\ &\quad = \binom{m}{r} p^r - \binom{m}{r}\binom{m-r}{1} p^{r+1} + \binom{m}{r}\binom{m-r}{2} p^{r+2} \\ &\quad - \binom{m-r}{s} p^{r+s} - \cdots + (-1)^r \binom{m}{r}\binom{m-r}{r} p^n\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Im Falle der Gleichheit der p, dem Gleichung (7) entspricht, ist

$$Z_r = \binom{m}{r} p^r, \quad Z_{r+1} = \binom{m}{r+1} p^{r+1}, \ldots, Z_m = p^m,$$

so daß wir als besonderen Wert von P_r haben:

$$\binom{m}{r} p^r + A_1 \binom{m}{r+1} p^{r+1} + A_s \binom{m}{r+s} p^{r+s} + \cdots + A_{m-r} p^m. \tag{8}$$

Aus dem Vergleich von Gleichung (7) und der Gleichung (8) folgt:

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= -\binom{m}{r}\binom{m-r}{1}\frac{1}{\binom{m}{r+1}} = -\binom{r+1}{1} \\ A_2 &= \binom{m}{r}\binom{m-r}{2}\frac{1}{\binom{m}{r+2}} = \binom{r+2}{2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-r} &= (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und indem wir in die Gleichung (6) die Werte (9) einsetzen:

$$P_r = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} - \cdots$$
$$+ (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} Z_m.^{1)} \qquad (10)$$

Man sieht sofort, daß, falls man die Indizes der Z durch Exponenten ersetzt, und annimmt, daß

$$Z_{m+1} = Z_{m+2} = \cdots = 0,$$

der Gleichung (10) die symbolische Form

$$P_r = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} \qquad (11)$$

gegeben werden kann.

9. Die Wahrscheinlichkeit

$${}_n p \frac{r}{x_1 x_2 \ldots x_m}, \qquad (12)$$

daß von m Individuen mindestens r nach n Jahren noch leben, ist offenbar durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten definiert, daß r, $r+1$, $r+2 \ldots$, m Individuen überleben.

Der Wert des Ausdrucks (12) kann also aus den Wahrscheinlichkeiten

$${}_n p \frac{r}{x_1 x_2 \ldots x_n} = P_r$$

abgeleitet werden, indem man der Reihe nach für r die Werte r, $r+1$, $r+2, \ldots$ einsetzt und bekannte Sätze der Kombinationenlehre zur Vereinfachung der erhaltenen Ausdrücke anwendet[2]).

Die konsequente Durchführung des symbolischen Kalküls führt indessen rascher zum Ziel und kann also zur Gewinnung der

1) *Czuber, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung* usw. S. 55. Vgl. ebenfalls *Text-book of the English Actuaries*, London 1902, §§ 27 bis 31 und *Toja, Sopra alcune formole del Calcolo delle Probabilità*, in Bollettino degli Attuari, Heft 12; Toja gibt einen sehr eleganten Beweis der Formeln des Textes. Neuerdings ist das Problem von *P. Medolaghi* wieder aufgenommen worden, der sich des Logikkalküls bedient (*Giornale di Matematiche pure ed applicate* [*di Battaglini*] Jahrgang 1907).

2) Vgl. z. B. *Potérin du Motel, Théorie des Assurances sur la vie* (Paris 1899), Seite 61.

nötigen Formeln, wenn auch nicht zu ihrem durchaus strengen Beweis, mit Nutzen angewandt werden.

Es gilt identisch:

$${}_n p \frac{r}{x_1, x_2, \ldots x_m} - {}_n p \frac{r+1}{x_1, x_2, \ldots x_m} = {}_n p \frac{[r]}{x_1 x_2 \ldots x_m}$$

also:

$${}_n p \frac{r}{x_1 x_2 \ldots x_m} - {}_n p \frac{[r]}{x_1 x_2 \ldots x_m} = {}_n p \frac{r+1}{x_1 x_2 \ldots x_m}. \qquad (13)$$

Bedenkt man, daß

$${}_n p \frac{0}{x_1 x_2 \ldots x_m} = 1$$

$${}_n p \frac{[0]}{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{Z^0}{1+Z} = \frac{1}{1+Z},$$

so hat man unmittelbar, falls die Gleichung (13) berücksichtigt wird:

$${}_n p \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_m} = 1 - \frac{1}{1+Z} = \frac{Z}{1+Z}$$

$${}_n p \frac{2}{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{Z}{1+Z} - \frac{Z}{(1+Z)^2} = \frac{Z^2}{(1+Z)^2}.$$

Man sieht leicht, daß die Gleichung

$${}_n p \frac{r}{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r},$$

falls sie für $r = r$ gilt, auch für r gleich $r+1$ gelten wird.

Es ist in der Tat

$$\frac{Z^r}{(1+Z)^r} - \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} = \frac{Z^{r+1}}{(1+Z)^{r+1}}.$$

10. Es seien (x), (y), (z) drei Individuen.

Es ist

$${}_n p_{xyz} = {}_n p_x \, {}_n p_y \, {}_n p_z$$

die Wahrscheinlichkeit, daß keines von ihnen innerhalb n Jahren stirbt,

$${}_n q_{xyz} = (1 - {}_n p_x)(1 - {}_n p_y)(1 - {}_n p_z)$$
$$= 1 - ({}_n p_x + {}_n p_y + {}_n p_z) + ({}_n p_{xy} + {}_n p_{xz} + {}_n p_{yz}) - {}_n p_{xyz}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß keines von ihnen n Jahre überlebt. Eine solche Wahrscheinlichkeit entspricht offenbar der Entwicklung von $\frac{1}{1+Z}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß nicht alle drei In-

dividuen innerhalb n Jahren sterben, ist komplementär zu der vorhergehenden. Wir finden

$$1 - {}_nq_{xyz} = {}_np_x + {}_np_y + {}_np_z - ({}_np_{xy} + {}_np_{xz} + {}_np_{yz}) + {}_np_{xyz}$$

in Übereinstimmung mit der Entwicklung von

$$\frac{Z}{1+Z} = {}_np\frac{1}{xyz}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Überlebens eines einzigen Individuums ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß (x) überlebt, während (y) und (z) sterben, daß (y) überlebt, während (x) und (z) sterben, daß (z) überlebt, während (x) und (y) sterben. Sie ist also

$$\begin{aligned}{}_np_x(1 - {}_np_y)(1 - {}_np_z) + {}_np_y(1 - {}_np_x)(1 - {}_np_z) \\ + {}_np_z(1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y) = {}_np_x + {}_np_y + {}_np_z \\ - 2({}_np_{xy} + {}_np_{xz} + {}_np_{yz}) + 3\,{}_np_{xyz} = \frac{Z}{(1+Z)^2}.\end{aligned}$$

In analoger Weise würde man die Wahrscheinlichkeiten finden, daß zwei Individuen, oder mindestens zwei Individuen, überleben.

11. Die Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Reihenfolgen des Eintretens der Sterbefälle bei einer Gruppe führt, schon für kleine Werte von m, (z. B. $m = 3$), zu einer sehr großen Anzahl von Fällen.

Es ist indessen nicht von Interesse, sie alle in erschöpfender Weise und getrennt voneinander zu betrachten, da die Methode ihrer Bestimmung wesentlich dieselbe bleibt, und da praktisch nur Probleme in Betracht kommen, bei welchen die Anzahl der Individuen nicht größer ist als drei. Wir werden uns deswegen mit der Betrachtung von Gruppen begnügen, welcher aus drei oder zwei Individuen bestehen, ohne alle möglichen Fälle zu betrachten; es wird für den Leser leicht sein, die Analyse auf die hier nicht betrachteten Möglichkeiten auszudehnen.

Ferner werden wir der Einfachheit halber annehmen, daß, falls q die Sterbenswahrscheinlichkeit einer Gruppe von r Individuen ausdrückt, $\frac{q}{r!}$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß die r Sterbefälle nach einer *a priori* vorgeschriebenen Reihenfolge eintreten; wir werden also das in Rede stehende Problem mit dem früher erwähnten anderen identifizieren, bei dem nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, daß r Punkte, die beliebig auf einer Strecke

gewählt worden sind, in einer bestimmten Ordnung aufeinander folgen.

Dieser Annahme liegt die andere einer gleichmäßigen Verteilung der Sterbefälle im Laufe eines Jahres zugrunde.

Dies führt im Falle zweier Individuen (x) und (y) zur Annahme, daß alle y-altrigen in der Mitte des Jahres sterben, während eine Hälfte der Sterbefälle von x-altrigen in der ersten Hälfte des Jahres, die übrigen Todesfälle in den letzten sechs Monaten eintreten werden. Dann ist offenbar $\frac{1}{2}q_{xy}$ die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl (x) als (y) im Laufe des Jahres sterben, (x) aber vor (y) (d. h. im ersten Semester) — $\frac{1}{2}q_{xy}$ die Wahrscheinlichkeit, daß, während beide im Laufe des Jahres sterben, (x) nach (y) stirbt.

12. Die Wahrscheinlichkeit ${}_{n-1|}q^1_{xy}$, daß (x) im Laufe des n^{ten} Jahres (d. h. im Altersintervall $(x+n-1, x+n)$) stirbt, während (y) ihn überlebt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß, während (x) im angegebenen Altersintervall stirbt, (y) das Alter $y+n$ erreicht, und daß sowohl (x) als (y) im Laufe des n^{ten} Jahres sterben, (x) aber vor (y). Es ist also

$$\begin{aligned}{}_{n-1|}q^1_{xy} &= ({}_{n-1}p_x - {}_np_x)\,{}_np_y + \tfrac{1}{2}({}_{n-1}p_x - {}_np_x)({}_{n-1}p_y - {}_np_y) \\ &= \tfrac{1}{2}({}_{n-1}p_x - {}_np_x)({}_{n-1}p_y + {}_np_y). \qquad (14)\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\sum_{n=1} {}_{n-1|}q^1_{xy}$$

die Wahrscheinlichkeit Q^1_{xy} dafür, daß (x) vor (y) stirbt. Wir bekommen, indem wir berücksichtigen, daß man die Gleichung (14) in der Form schreiben kann:

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \tfrac{1}{2}\left({}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy} - \frac{{}_np_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{{}_np_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right) \qquad (15)$$

und daß

$$\sum({}_{n-1}p_{xy} - {}_np_{xy}) = 1$$

$$Q^1_{xy} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{e_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{e_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right), \qquad (16)$$

wo

$$\sum {}_np_{xy} = e_{xy}$$

oder, allgemeiner

$$\sum {}_np_{xy\cdots(z)} = e_{xy\cdots(z)}$$

die mittlere Anzahl der Jahre ausdrückt, die vergehen wird, ehe der erste Todesfall eintritt *(die mittlere Lebensdauer der Gruppe)*[1].

13. Wir überlassen dem Leser, zu beweisen — was keine Schwierigkeit bietet und ganz analog durchgeführt werden kann — daß die Wahrscheinlichkeit ${}_{n-1|}q^1_{xyz}$ dafür, daß (x) im Laufe des n^{ten} Jahres stirbt, während (y) und (z) ihn überleben, und die Wahrscheinlichkeit Q^1_{xyz}, daß (x) vor (y) und vor (z) stirbt, durch die Relationen definiert werden

$$\begin{aligned} {}_{n-1|}q^1_{xyz} &= \tfrac{1}{3}\left({}_{n-1}p_{xyz} - {}_{n}p_{xyz}\right) - \tfrac{1}{3}\left({}_{n}p_{x}\,{}_{n-1}p_{yz} - {}_{n-1}p_{x}\,{}_{n}p_{yz}\right) \\ &+ \tfrac{1}{6}\left({}_{n-1}p_{xy}\,{}_{n}p_{z} - {}_{n}p_{xy}\,{}_{n-1}p_{z} + {}_{n-1}p_{xz}\,{}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{xz}\,{}_{n-1}p_{y}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} Q^1_{xyz} &= \tfrac{1}{3}\left\{1 - \frac{e_{x:y-1:z-1}}{p_{y-1:z-1}} + \frac{e_{x-1:y:z}}{p_{x-1}}\right\} \\ &+ \tfrac{1}{6}\left\{\frac{e_{x-1:y-1:z}}{p_{x-1:y-1}} - \frac{e_{x:y:z-1}}{p_{z-1}} + \frac{e_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{e_{x:y-1:z}}{p_{y-1}}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß (z) nach (x) und nach (y), und (x) nach (y) stirbt — $Q^2_{x\underset{1}{y}z}$ — ist offenbar die Differenz der Wahrscheinlichkeiten, daß (x) vor (z) bzw. daß (x) vor (y) und vor (z) stirbt. Es ist also

$$Q^2_{x\underset{1}{y}z} = Q^1_{xz} - Q^1_{xyz}. \tag{19}$$

Es gelten offenbar die Beziehungen

$$Q^2_{xyz} = Q^2_{x\underset{1}{y}z} + Q^2_{xy\underset{1}{z}} = Q^1_{xy} + Q^1_{xz} - 2\,Q^1_{xyz} \tag{20}$$

$$Q^3_{xyz} = 1 - Q^1_{xyz} - Q^2_{xyz} = 1 - Q^1_{xy} - Q^1_{xz} + Q^1_{xyz} \tag{21}$$

zwischen den Wahrscheinlichkeiten, daß (x) entweder nach (y) oder nach (z), und daß (x) nach (y) und nach (z) stirbt, und den vorher definierten Wahrscheinlichkeiten.

1) Auch hier, wie im Falle einzelner Individuen, wird

$$\mathring{e}_{xy\ldots(z)} = \frac{1}{l_x l_y \ldots l_{(z)}} \int_0^\infty l_{x+t}\, l_{y+t} \ldots l_{(z)+t}\, dt$$

die *complete expectation of life* der Gruppe sein.

Einleuchtend ist ferner die Bedeutung der Bezeichnungen $Q^1_{x:\overline{yz}}$ und $Q^{\,1}_{\overline{xy}:z}$, welche durch die Relationen definiert werden

$$Q^1_{x:\overline{yz}} = Q^1_{xyz} + Q^2_{xyz} \tag{22}$$

$$Q^{\,1}_{\overline{xv}:z} = Q^2_{x\underset{1}{y}z} + Q^{\;2}_{\underset{1}{x}yz}. \tag{23}$$

§ 3. **Die Kommutationswerte.**

14. Ist in der Summe

$$S_1 v p_1 + S_2 v^2 v_2 + \cdots + S_n v^n p_n = V$$

$$S_1 = S_2 = \cdots = S_n$$

oder besteht zwischen den Größen S eine einfache Relation (z. B. eine lineare: der einzige Fall, der praktisch wichtig ist) so ist es auch möglich, den Wert V dadurch in sehr einfacher Weise zu bestimmen, daß man besondere Größen — die *Kommutationswerte* — einführt und Tafeln derselben anwendet.

Fundamental unter diesen Größen ist das Produkt aus der Zahl der Lebenden des Alters x und dem Diskontierungsfaktor v^x. Es wurde von *Tetens* (*Einleitung zur Berechnung der Leibrenten*, Leipzig 1785—1786) eingeführt und wird mit D_x bezeichnet. Man setzt also

$$D_x = v^x l_x. \qquad \text{I}$$

Die anderen Werte lassen sich alle durch diesen einfach definieren. Ihre Definition bei den verschiedenen Schriftstellern ist nicht immer völlig einheitlich; indessen ist die durch Einfachheit sich auszeichnende englische Bezeichnungsweise fast allgemein üblich geworden. Wir geben sie hier an, indem wir mit ω das höchste Lebensalter bezeichnen:

$$\sum_{x+1}^{\omega} D_x = \sum_{x+1} D_x = N_x \qquad \text{II}$$

$$\sum\sum_{x+1} D_x = \sum_{x} N_x = S_x \qquad \text{III}$$

$$v D_x - D_{x+1} = v^x d_x = C_x \qquad \text{IV}$$

$$\sum_{x} C_x = M_x \qquad \text{V}$$

$$\sum_{x}\sum C_x = \sum_{x} M_x = R_x. \qquad \text{VI}$$

Wird statt dessen mit den französischen und amerikanischen Schriftstellern

$$\sum_x^{\omega} D_x = N_x \qquad \text{II}'$$

und

$$\sum_x \sum N_x = S_x \qquad \text{III}'$$

gesetzt, so hat man den Vorteil einer größeren Übereinstimmung mit den übrigen Definitionen. Die Tragweite eines solchen Vorteils ist allerdings nur sehr beschränkt. Es wird auch gesetzt[1]):

$$C_x = d_x v^{x+\frac{1}{2}} \qquad \text{IV}'$$

und infolgedessen

$$v^{-\frac{1}{2}} \sum_x d_x v^{x+1} = M_x \qquad \text{V}'$$

$$v^{-\frac{1}{2}} \sum_x \sum d_x v^{x+1} = R_x, \qquad \text{VI}'$$

wo man für

$$v^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{1+i}\right)^{-1}$$

einen angenäherten Wert annimmt.

Die Möglichkeit der Verwechselung der neuen C_x, M_x, R_x mit den vorherigen wird durch Einführung neuer Symbole aufgehoben; es ist natürlich zweckmäßig, daß man der Ähnlichkeit der eingeführten Größen Rechnung trägt.

Dieser Forderung genügen die Bezeichnungen $\mathbf{N}_x$, $\overline{C}_x$, $\overline{M}_x$, $\overline{R}_x$, welche die vorherigen bzw. ersetzen und die im *zweiten internationalen Versicherungskongresse* (Bruxelles 1902) vorgeschlagen wurden.

Es ist

$$\log D_x = \log l_x + x \log v\,.$$

Bei der Bestimmung der Werte N_x aus den D_x kann man mit Nutzen die Gaußschen Additions- und Subtraktionslogarithmen anwenden. Die Bestimmung geschieht in der Weise, daß man vom höchsten Alter ω ausgeht und

$$\log(D_\omega + D_{\omega-1}), \quad \log(D_\omega + D_{\omega-1} + D_{\omega-2})$$

1) Vgl. z. B. *Potérin du Motel*, l. c. Seite 218.

berechnet. Es ist

$$N_\omega = 0, \quad N_{\omega-1} = D_\omega, \quad N_{\omega-2} = D_\omega + N_{\omega-1} = D_{\omega-1} + D_\omega, \ldots$$

und analog für die übrigen abgeleiteten Kommutationswerte.

15. Praktisch beschränkt man sich auf die Herstellung von Tafeln der Kommutationswerte eines einzigen Argumentes. Die Tafeln von Werten mehrerer Argumente würden einen sehr kleinen Anwendungswert besitzen und dabei höchst umfangreich sein.

Aus den Untersuchungen von § 2 folgt, daß sich die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Zusammensetzungen einer ursprünglichen Gruppe $\{x, y \ldots\}$ zu verschiedenen Zeiten auf die algebraische Summe von Wahrscheinlichkeiten der Form ${}_n p_{xyz\ldots}$ zurückführen lassen, d. h. auf die Summe von Überlebenswahrscheinlichkeiten einer Gruppe. Grundlegend würde also hier, wie im Falle einzelner Individuen, die Einführung einer Größe D sein, welche die auf einen willkürlichen Zeitpunkt bezogene Anzahl der Lebenden

$$l_x \cdot l_y \cdot l_z \cdots$$

ausdrückt.

Man kann setzen, sowohl:

$$D_{x_1 x_2 \cdots x_m} = v^{x_1} l_{x_1} l_{x_2} \ldots l_{x_m} \;{}^{1)}$$

als:

$$D_{x_1 x_2 \cdots x_m} = v^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}} l_{x_1} \cdot l_{x_2} \cdot l_{x_3} \cdots l_{x_m}\,.$$

Die zweite Definition hat den Vorteil der Symmetrie und daß

$$D_{x_1+n,\, x_2+n,\, \cdots,\, x_m+n} = v^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_m}{m} + n} l_{x_1+n} l_{x_2+n} \ldots l_{x_m+n}$$

ist.

1) Es ist zweckmäßig, als Exponenten von v das größte unter den Altern $x_1, x_2, \ldots, x_m$ zu wählen, um D möglichst klein zu machen. Schon für zwei Individuen sind die Größen D sehr groß. Man hat z. B. (Tafel H^M) für $v = 1{,}035^{-1}$:

$$v^{25} l_{20} l_{30} = 3 \cdot 645 \cdot 508 \cdot 974$$

$$v^{30} l_{20} l_{30} = 3 \cdot 609 \cdot 420 \cdot 726\,.$$

Bei der genannten Tafel ist $l_0 = 127 \cdot 283$.

Die Annahme $l_0 = 1 \cdot 273$ würde die Werte liefern:

364 · 760

307 · 118

und für praktische Zwecke wäre die Annäherung genügend groß.

Man hat für zwei Individuen (x) und (y) nach der *de Morgan*schen Bezeichnungsweise

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} \cdot l_x l_y \qquad \text{VII}$$

Ferner setzen wir

$$\sum_{(x+1,\,y+1)} D_{xy} = N_{xy} \qquad \text{VIII}$$

$$v D_{xy} - D_{x+1:y+1} = v^{1+\frac{x+y}{2}} (l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) = C_{xy} \qquad \text{IX}$$

$$\sum_{(x,y)} C_{xy} = M_{xy}. \qquad \text{X}$$

Berücksichtigt man die Reihenfolge der Sterbefälle, so werden die Größen einzuführen sein (vgl. § 2):

$$v^{\frac{x+y}{2}} l_{y+\frac{1}{2}} d_x = C_{xy} \qquad \text{XI}$$

$$\sum_{(x,y)} C^1_{xy} = M^1_{xy}. \qquad \text{XII}$$

§ 4. **Anwendung der Gompertzschen und der Makehamschen Eigenschaften. — Die Simpsonsche Regel.**

16. Wir haben gesehen, daß man, falls die Gompertzsche Eigenschaft gilt, die Überlebenswahrscheinlichkeiten einer Gruppe $\{x, y, z \ldots\}$ durch die Überlebenswahrscheinlichkeit eines einzigen Individuums (ξ_1) ersetzen kann, dessen Alter ξ_1 durch die Gleichung definiert wird:

$$c^{\xi_1} = c^x + c^y + c^z + \cdots, \qquad \text{(a)}$$

wo c eine Konstante ist; und daß man, falls die Makehamsche Eigenschaft gilt, die Überlebenswahrscheinlichkeiten einer Gruppe $\{x, y, z \ldots\}$ von r Individuen durch diejenigen einer Gruppe $\{\xi_2, \xi_2 \ldots\}$ von r gleichaltrigen Individuen ersetzen kann, deren Alter ξ_2 durch die Gleichung definiert wird:

$$r c^{\xi_2} = c^x + c^y + c^z + \cdots, \qquad \text{(b)}$$

wo c eine von der vorherigen verschiedene Konstante bedeutet.

Darin liegt die große praktische Bedeutung der beiden Formeln, denen diese Eigenschaften zukommen: sie ermöglichen die Ersetzung von Tafeln mehrerer Argumente durch solche eines einzigen Argumentes.

So z. B. werden bezüglich der Kommutationstafeln die gewöhnlichen $D_x, N_x \ldots$ Tabellen in dem Falle genügen, wo die Gompertzsche Überlebensformel gilt, oder man wird im Falle der Makehamschen Formel mit Tafeln

$$D_{xxx\cdots x}, \quad N_{xxx\cdots x}, \ldots$$

auskommen, um die Probleme zu lösen, die sich auf die Versicherung von Gruppen beziehen. Es ist in der Tat immer möglich, diese Versicherungen in andere zu zerlegen, welche durch Summationen der Form

$$\sum_{(n)} v_n{}^n p_{xyz\cdots(r)}$$

definiert werden, bei welchen die Substitution (a) oder (b) immer ausgeführt werden kann.

17. Die wirkliche Bestimmung der Größen ξ_1 und ξ_2 kann man ohne den Gebrauch von Tafeln der Potenzen von c praktisch ausführen, indem man sich der Sterbeintensitäten oder, im Falle (a) sogar der Überlebenswahrscheinlichkeiten $P_x = {}_n p_x$ bedient.

Es ist in der Tat, falls (a) gilt

$$\mu_{\xi_1} = B c^{\xi_1}, \quad p_x = g^{(c-1)c^x}$$

und

$$\mu_{\xi_1} = B(c^x + c^y + \cdots) = \mu_x + \mu_y + \mu_z + \cdots$$

$$\log p_{\xi_1} = c^{\xi_1}(c-1) \log g = (c^x + c^y + c^z + \cdots)(c-1) \log g$$
$$= \log p_x + \log p_y + \cdots,$$

woraus

$$p_{\xi_1} = p_x p_y p_z \cdots$$

folgt. Gilt dagegen die Makehamsche Formel, so ist

$$\mu_x = A + B c^x$$

und

$$r \mu_{\xi_2} = rA + rBc^{\xi_2} = rA + B(c^x + c^y + c^z + \cdots)$$
$$= \mu_x + \mu_y + \mu_z + \cdots.$$

Ein einziges Beispiel sei angeführt.

Es sei

$$x = 28, \quad y = 35, \quad z = 46.$$

Nach der Tafel H^M ist:

$$\mu_{28} = \cdot 00742$$
$$\mu_{35} = \cdot 00854$$
$$\mu_{46} = \underline{\cdot 01260}$$
$$3\mu_{\xi_2} = \cdot 02856$$
$$\mu_{\xi_2} = \cdot 00952.$$

Die Tafel der Werte μ_x liefert:

$$\mu_{38} = \cdot 00928$$
$$\mu_{39} = \cdot 00957$$

und infolgedessen:

$$38 < \xi_2 < 39$$
$${}_np_{38:38:38} > {}_np_{28:35:46} > {}_np_{39:39:39}.$$

Den Wert A_0 einer bestimmten Versicherung wird man durch lineare Interpolation zwischen den Werten A_1 und A_2 derselben Versicherung bestimmen, die sich auf die Gruppen $\{38, 38, 38\}$ und $\{39, 39, 39\}$ beziehen.

Man nimmt also an, daß

$$A_0 = A_1 + \frac{\mu_{\xi_2} - \mu_{38}}{\mu_{39} - \mu_{\xi_2}}(A_2 - A_1).$$

Die Tafel H^M ist nach der Makehamschen Formel ausgeglichen worden; die Gleichung (b) gilt also hier genau.

Nicht dasselbe kann von der Gleichung (a) gesagt werden, welche — immer nach derselben Tafel — liefern würde:

$$\mu_{59} = \cdot 02719$$
$$\mu_{60} = \cdot 02920$$
$${}_np_{59} > {}_np_{28:35:46} > {}_np_{60}.$$

18. Aus den vorangehenden Betrachtungen und aus dem Satz von Quiquet folgt, daß die Anwendung der Methoden, nach welchen Wahrscheinlichkeiten für beliebige Gruppen auf Wahrscheinlichkeiten gleichaltriger und auf Wahrscheinlichkeiten einzelner Individuen zurückgeführt werden, desto berechtigter sein wird, je besser die Makehamsche bzw. die Gompertzsche Funktion die beobachtete Kurve der Überlebenden darstellt.

Es folgt daraus, daß die Möglichkeit der Anwendung *a priori* auszuschließen ist, falls die betrachteten Gruppen aus sehr jungen Individuen bestehen oder sehr junge Individuen enthalten.

Denn nach der Formel

$$\mu_x = A + Bc^x \qquad (A = 0,\ A \neq 0)$$

ist die Sterbeintensität μ_x auch für $x < 17$ eine zunehmende Funktion des Alters, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

Im allgemeinen ist die Übereinstimmung der wirklichen Überlebenskurven mit dem Gompertzschen Gesetze nicht sehr befriedigend; sie anzunehmen ist nur in dem Falle zulässig, wo sich die Überlebenswahrscheinlichkeiten auf nicht allzu lange Zeitstrecken beziehen und die Alter der verschiedenen Individuen der Gruppe nicht zu stark voneinander abweichen. Besser eignet sich dagegen die Makehamsche Regel zur Darstellung von Überlebenstabellen, die nicht nach ihr ausgeglichen worden sind.

Es ist in solchen Fällen, wenn auch nicht streng berechtigt, doch praktisch zulässig, daß man sich der Gleichung (b) bedient. Bei der Unbekanntheit der Sterbeintensitäten μ_x wird man von der Bestimmung der Konstanten c nicht absehen können, welche mit praktisch genügender Annäherung durch die Formel

$$c^m = \frac{\log p_{x+m} - \log p_{x+2m}}{\log p_x - \log p_{x+m}}$$

definiert wird, wo x dem niedrigsten, $x + 2m$ dem höchsten Alter entspricht (z. B. $20 < x < 25$, $30 < m < 40$). Man findet für die gewöhnlich angewandte Sterblichkeitstafel einen Wert von $\log c$, der 0,04 merklich nahe kommt.

19. Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, daß die sogenannte *Simpson*sche Regel, nach welcher man im Falle, wo $x < y < z$,

$$\sum v_n {}^n p_{xyz}$$

durch

$$\sum v_n {}^n p_{xw}$$

immer da ersetzen kann, wo die Bedingungsgleichung

$$\sum v_n {}^n p_{xy} = \sum v_n {}^n p_w$$

erfüllt ist, nur im Falle der Gültigkeit der Gompertzschen Formel streng begründet ist. Es läßt sich beweisen, daß im negativen Falle und für alle nicht allzu hohen Alter

$$\sum v_n{}^n p_{xw} > \sum v_n{}^n p_{xyz}$$

ist[1]).

Kapitel II.

Die Bestimmung des Wertes der hauptsächlichen Versicherungsformen.

§ 1. Die Erlebensversicherung.

1. Bezeichnen wir mit ${}_nE_x$ den Wert des Einheitskapitals, welches nach n Jahren in dem Falle zu zahlen ist, daß ein bestimmtes Individuum (x) das Alter $x + n$ erreicht, so ist offenbar

$${}_nE_x = v_n{}^n p_x$$

oder, indem wir für ${}_np_x$ seinen Ausdruck

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

einsetzen, Zähler und Nenner des Bruches mit v^x multiplizieren und die Relation $v^x l_x = D_x$ berücksichtigen,

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Ebenso ist

$${}_{n+n'}E_x = \frac{D_{x+n+n'}}{D_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\frac{D_{x+n+n'}}{D_{x+n}} = {}_nE_x\,{}_{n'}E_{x+n}.$$

Die Relation ist mit derjenigen Formel identisch, welche zwischen den Wahrscheinlichkeiten ${}_np_x$, ${}_{n+n'}p_x$, ${}_{n'}p_{x+n}$ besteht; die Werte ${}_nE_x$ der auf den Erlebensfall versicherten Kapitalien können als die Überlebenswahrscheinlichkeiten einer Gesamtheit aufgefaßt werden, bei welcher die Anzahl der Überlebenden des Alters x durch $v^x l_x = D_x$ ausgedrückt wird.

2. Ganz analoge Relationen gelten für Versicherungen auf mehrere Leben.

1) Vgl. über die Simpsonsche Regel und die von *Milne* und anderen vorgeschlagenen Verbesserungen derselben, *Text-book*, 2[d] ed. Kap. XII, S. 198 ff.

Bezeichnet ${}_nE_{xy\ldots}$ den Wert des nach n Jahren und in dem Falle zahlbaren Kapitals, daß alle Individuen der Gruppe $\{x, y, \ldots\}$ nach n Jahren noch leben, so ist

$${}_nE_{xy} = v_n{}^n p_{xy\ldots} = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}\,\frac{l_{y+n}}{l_y}\cdots = \frac{D_{x+n,\,y+n,\ldots}}{D_{xy\ldots}}.$$

§ 2. Die Leibrenten.

3. Die Summation der Größen ${}_nE_x$ erstreckt auf die ganzzahligen Werte von n des Intervalls $(1, \omega - x)$ definiert den Wert einer postnumerando zahlbaren Leibrente auf das Leben (x), d. h. einer Rente, deren erste Zahlung nach einem Jahre, und deren spätere Zahlungen bzw. nach $2, 3 \ldots$ Jahren, solange (x) lebt, erfolgen. Bezeichnen wir sie mit a_x, so ist nach II von S. 192:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}. \qquad (1)$$

Ist analog $a_{xy\ldots}$ der Wert der Einheitsrente, die am Ende jedes Jahres und so lange bezahlt werden soll, als keines von den Individuen der Gruppe $\{x, y \ldots\}$ verstorben ist, so ist nach VIII (S. 194):

$$a_{xy\ldots} = \frac{D_{x+1:y+1\ldots} + D_{x+2:y+2\ldots} + \cdots}{D_x} = \frac{N_{xy\ldots}}{D_{xy\ldots}}. \qquad (2)$$

4. Mit Hilfe der Relationen

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x}\,\frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} = vp_x(1 + a_{x+1})$$

$$a_{xy\ldots} = \frac{N_{xy\ldots}}{D_{xy\ldots}} = \frac{D_{x+1:y+1\ldots}}{D_{xy\ldots}} + \frac{D_{x+1:y+1\ldots}}{D_{xy\ldots}}\,\frac{N_{x+1:y+1\ldots}}{D_{x+1:y+1\ldots}}$$

$$= vp_{xy\ldots}(1 + a_{x+1:y+1\ldots}),$$

welche sehr leicht aus der Gleichung (1) bzw. aus der Gleichung (2) folgen, kann man Tafeln der Werte

$$a_x \quad \text{bzw.} \quad a_{xy\ldots}$$

berechnen, indem man vom höchsten Alter ω ausgeht, und eine Tafel der Größen p_x und $v, v^2, \ldots$ als gegeben annimmt.

Man hat

$$a_\omega = 0$$

und aus der obigen Gleichung:

$$a_{\omega-1} = vp_{\omega-1}, \quad a_{\omega-2} = vp_{\omega-2}(1 + vp_{\omega-1})$$
$$= vp_{\omega-2} + v^2 p_{\omega-1} p_{\omega-2}$$
$$a_{\omega-n} = vp_{\omega-n} + v^2 p_{\omega-n} p_{\omega-n+1}$$
$$+ v^3 p_{\omega-n} p_{\omega-n+1} p_{\omega-n+2} + \cdots$$

oder, falls man x für $\omega - n$ schreibt,

$$a_x = vp_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \cdots$$
$$= vp_x + v_2{}^2 p_x + v_3{}^3 p_x + \cdots \tag{3}$$

eine Beziehung, die wir direkt aus der Definition der Leibrente hätten ableiten können.

Man erhält ferner, falls man annimmt, daß

$$x > y, \ldots, x + n' = \omega:$$
$$a_{\omega, y+n'} = 0, \quad a_{\omega-1:y+n-1} = vp_{\omega-1:y+n'-1}\ldots$$
$$a_{xy} = vp_{xy} + v^2 p_{xy} p_{x+1:y+1} + \cdots = vp_{xy} + v_2{}^2 p_{xy} + \cdots,$$

welche der Gleichung (3) vollständig analog ist; in der Tat gelten für die Gruppenversicherungen auf den ersten Todesfall Formeln, die mit denjenigen formell identisch sind, welche Versicherungen auf einzelne Leben betreffen.

5. Es bezeichne

$|_m a_x = a_{x\overline{m}|}$ die auf m Jahre abgekürzte temporäre Rente, die also höchstens m-mal zur Auszahlung kommt;

$_m|_{n-m} a_x$ die um m Jahre aufgeschobene auf $\overline{n-m}$ Jahre abgekürzte temporäre Rente, die zum erstenmal nach $\overline{m+1}$ Jahren und dann höchstens $\overline{n-m}$-mal zur Auszahlung kommt;

$_n|a_x$ die um n Jahre aufgeschobene Leibrente.

Dann ist offenbar

$$|_m a_x = \frac{\sum\limits_{m=1}^{m=m} D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$_m|_{n-m} a_x = \frac{\sum\limits_{m=m+1}^{m=n} D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{D_x}$$

$$_n|a_x = \frac{\sum\limits_{m=n+1} D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

und

$$|_m a_x + {}_m|_{n-m} a_x + {}_n|a_x = |_m a_x + {}_mE_x \cdot |_{n-m} a_{x+m} + {}_nE_x \cdot a_{x+n} = a_x$$

oder, falls $m = n$,

$$a_x = |_n a_x + {}_n a_x = |_n a_x + {}_nE_x \cdot a_{x+n}.$$

Analog wird man die temporären, temporären und aufgeschobenen, aufgeschobenen Verbindungsrenten $|_m a_{xy,\ldots}$, $_m|_{n-m} a_{xy\ldots}$, $_n|_x a_{xy\ldots}$ einführen, und durch die Kommutationswerte $N_{xy\ldots}$, $D_{xy\ldots}$ und die diskontierten Kapitalien $_nE_{xy\ldots}$ ausdrücken und miteinander verbinden.

6. Mit $(va)_{x\overline{n}|}$ bezeichnen wir den Wert einer auf n Jahre abgekürzten temporären Rente auf die Person (x), deren Anfangsbetrag α ist, und die jährlich um β zu- bzw. abnimmt, bis sie den Endbetrag $\alpha \pm (n-1)\beta$ am Ende des n-ten Jahres erreicht. Die $(va)_{x\overline{n}|}$ kann man als die Resultante der Summe

$$\alpha|_n a_x \pm \beta \cdot {}_1|_{n-1} a_x \pm \beta_2|_{n-2} a_x \pm \cdots \pm \beta \cdot {}_{n-1}|_1 a_x$$

auffassen, und indem man die Größen $_r|_{n-r} a_x$ und $|_n a_x$ durch die vorhin abgeleiteten Ausdrücke ersetzt und

$$\sum N_x = S_x$$

schreibt, findet man:

$$\frac{1}{D_x}[\alpha(N_x - N_{x+n}) \pm \beta\{N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots N_{x+n} - nN_{x+n}\}]$$
$$= \frac{\alpha(N_x - N_{x+n}) \pm \beta(S_x - S_{x+n+1} - nN_{x+n})}{D_x} = (va)_{x\overline{n}|}.$$

Für $\alpha = \beta = 1$ bekommt man:

$$\frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$$

oder:

$$\frac{N_x + (n-1)N_{x+n} - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x},$$

je nachdem die Rente zu- oder abnimmt. Letzteren Wert, d. h. den Wert einer Rente, die mit 1 beginnt und jährlich um 1 steigt, bezeichnet man mit $(Ia)_{x\overline{n}|}$[1]).

1) $I \equiv$ *Increasing*, $v \equiv$ *variable*.

Ist $n \geqq \omega - x$, so wird $(va)_{x\overline{n}|}$ zu

$$\frac{\alpha N_x \pm \beta S_{x+1}}{D_x} = (va)_x$$

oder, falls $\alpha = \beta = 1$ und die Rente zunimmt,

$$\frac{S_x}{D_x} = (Ia)_x.$$

Es ist auch offenbar

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = (Ia)_{x\overline{n}|} + n \cdot {}_{n+1|}a_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x} = (Ia)_x - {}_nE_x(Ia)_{x+n}$$

der Wert einer Rente, die mit 1 beginnt, jährlich, jedoch nur $n - 1$ mal, um 1 steigt und von da ab konstant bleibt.

7. Es bezeichne $\mathbf{a}_x$ den Wert der Einheitsrente für die Person (x), welche *pränumerando* zahlbar ist (im Gegensatz zu dem Wert a_x der *postnumerando* zahlbaren Leibrente), deren erste Zahlung also sofort, deren letzte am Beginne des Sterbejahres der Person (x) erfolgt.

Es ist

$$\mathbf{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots}{D_x} = \frac{N_{x-1}}{D_x} = 1 + \frac{N_x}{D_x} = 1 + a_x.$$

Analog wird man erhalten, falls man, um pränumerando zahlbare Renten zu bezeichnen, überall a durch $\mathbf{a}$ ersetzt:

$${}_{n|}\mathbf{a}_x = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

$${}_{n|}\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+n-1}}{D_x}$$

und so fort. Es braucht nicht ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß die neuen Formeln unmittelbar auf Verbindungsrenten ausgedehnt werden können.

8. Eine sofort beginnende Rente vom Betrage 1 hat den Wert $\mathbf{a}_x$, eine nach einem Jahre beginnende Rente den Wert $\mathbf{a}_x - 1$; interpoliert man dazwischen linear, so ergibt sich als Wert der nach $\frac{s}{m}$ Jahren $(0 \leq s \leq m)$ beginnenden Rente:

$$\mathbf{a}_x - \frac{s}{m} = a_x + \frac{m-s}{m}.$$

Die Summe

$$m a_x + \frac{m-1}{2}$$

der Reihe

$$a_x,\ a_x + \frac{1}{m},\ \ldots,\ a_x + \frac{m-1}{m},$$

deren Glieder der Reihe nach den Werten $m, m-1, m-2, \ldots 1$ von s entsprechen, würde den Wert einer am Ende jedes m^{ten} Teils des Jahres fälligen Rente 1 darstellen; die Multiplikation mit $\frac{1}{m}$ ergibt den Wert einer Rente von gleicher Fälligkeit, aber vom Betrage $\frac{1}{m}$. Wir wollen diese Rente mit $a_x^{(m)}$ bezeichnen. Es ist also

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}, \tag{4}$$

sowie

$$\mathbf{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \frac{1}{m} = a_x + \frac{m+1}{2m} = \mathbf{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

der Wert der sogleich beginnenden nach je $\frac{1}{m}$ Jahr fälligen Rente vom Betrage $\frac{1}{m}$.

Der Grenzübergang

$$\lim_{m=\infty} a_x^{(m)} = \lim_{m=\infty} \mathbf{a}_x^{(m)} = \lim_{m=\infty} \left(a_x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2m}\right) = a_x + \frac{1}{2} \tag{5}$$

ergibt den Wert, den wir mit $\bar{a}_x = \bar{\mathbf{a}}_x$ bezeichnen, der gleichmäßig fließenden Rente (der *kontinuierlichen Rente*).

9. Aus der Identität

$${}_{|n}a_x = a_x - {}_nE_x \cdot a_{x+n}$$

folgt:

$${}_{|n}a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - {}_nE_x\left(a_{x+n} + \frac{m-1}{2m}\right)$$

$$= {}_{|n}a_x + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$$

als Wert der temporären auf n Jahre abgekürzten Rente, die am Ende jedes $\frac{1}{m}$ Jahres fällig wird; man leitet daraus, wegen

$${}_{n|}a_x = a_x - {}_{n|}a_x,$$

$${}_{n|}a_x^{(m)} = {}_{n|}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x \tag{6}$$

ab, als Wert der um n Jahre aufgeschobenen Rente, die am Ende jedes $\frac{1}{m}$ Jahres fällig wird.

10. Die Formeln (4) bis (6) können auf Verbindungsrenten ausgedehnt werden; nur liefern sie für diese eine kleine Annäherung. Sie entsprechen der Annahme, daß

$$D_{x+\frac{s}{m}} = D_x - \frac{s}{m}(D_x - D_{x+1}); \qquad (a)$$

mit anderen Worten, daß die Werte D eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. Die *de Moivre*sche Hypothese dagegen, nach welcher eine Relation der Form (a) für die Werte $l_x + \frac{s}{m}$ $\left(0 \leqq \frac{s}{m} \leqq 1\right)$ besteht, welche die Anzahl der Überlebenden des Alters $x + \frac{s}{m}$ ausdrücken, führt zu Relationen, die nicht ohne Weiteres auf Verbindungsrenten ausgedehnt werden können.

Es ist

$$\frac{1}{m}\frac{1}{l_x} v^{n+\frac{s}{m}} \left\{ l_{x+n} + \frac{s}{n}(l_{x+n-1} - l_{x+n}) \right\}$$

der diskontierte Wert der Zahlung $\frac{1}{m}$, die am Ende der Periode $\frac{mn+s}{m}$ in dem Falle stattfinden wird, wo (x) das Alter $x + \frac{mn+s}{m}$ erreicht.

Setzen wir

$$v^{\frac{1}{m}} = q,$$

so wird der vorherige Ausdruck zu

$$\frac{1}{D_x \cdot m}\left[\frac{m-s}{m} D_{x+n} q^s + \frac{s}{m} D_{x+n+1} q^{-m+s}\right].$$

Nimmt man hier nacheinander für n die Werte 0, 1, 2 ... und addiert, und addiert man nochmals nach dem Argument s, ($s = 1$, $2 \ldots m$), so erhält man den Wert der postnumerando am Ende jedes m^{ten} Jahresteils zahlbaren Leibrente vom Betrage $\frac{1}{m}$:

$$\left.\begin{aligned} a_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\left[(1+a_x)\sum_{m=1}^{m}\frac{m-s}{m} q^s + a_x \sum_{s=1}^{m} \frac{s}{m} q^{-m+s}\right] \\ &= \frac{a_x}{m}\left\{\sum_{m=1}^{m} q^s - \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} s q^s + \frac{1}{m}(1+i)\sum_{m=1}^{m} s q^s\right\} \\ &\quad + \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} q^s - \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m} s q^s \\ &= \frac{a_x}{m}\left\{\sum_{s=1}^{m} q^s + \frac{1}{m} i \sum_{s=1}^{m} s q^s\right\} + \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} q^s - \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m} s q^s \end{aligned}\right\} \cdot (7)$$

Es ist aber (vgl. S. 164 u. 176)

$$\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} q^s = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} v^{\frac{s}{m}} = \frac{iv}{j_{(m)}}$$

$$\frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m} s q^s = \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m} s v^{\frac{s}{m}} = \frac{i}{(1+i)^{1-\frac{1}{m}} j_{(m)}^2} - \frac{v}{j_{(m)}}.$$

Wir leiten aus der Gleichung (7) nach leichter Umformung ab:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{j_{(m)}} - \frac{i}{(1+i)^{1+\frac{1}{m}} j_{(m)}^2}(1 - i \cdot a_x) \qquad (8)$$

und für $\lim m = \infty$:

$$\lim_{m=\infty} j_{(m)} = \log(1+i) = \delta$$

$$\lim a_x^{(m)} = \bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i(1 - i a_x)}{(1+i)\delta^2} = \frac{i^2 \cdot a_x + (1+i)\delta - i}{(1+i)\delta^2}. \qquad (9)$$

11. Wir gehen zu einer Verbindungsrente auf zwei Personen über, und nehmen wieder an, daß

$$l_{x+n+\frac{s}{m}} = l_{x+n} + \frac{s}{m}(l_{x+n+1} - l_{x+n})$$

$$l_{y+n+\frac{s}{m}} = l_{y+n} + \frac{s}{m}(l_{y+n+1} - l_{y+n}).$$

Hier ist

$$\frac{1}{m}\frac{1}{(1+i)^{n+\frac{s}{m}}}\left(\frac{m-s}{m}l_{x+n}+\frac{s}{m}l_{x+n+1}\right)\left(\frac{m-s}{m}l_{y+n}+\frac{s}{m}l_{y+n+1}\right)\frac{1}{l\ l_y}$$

$$=\frac{1}{m^3}\frac{1}{(1+i)^{n+\frac{s}{m}}}\frac{1}{l_x l_x}\{(m-s)^2 l_{x+n}l_{y+n}+s(m-s)l_{x+n}l_{y+n+1}$$

$$+s(m-s)l_{x+n+1}l_{y+n}+s^2 l_{x+n+1}l_{y+n+1}\}$$

der diskontierte Wert der Zahlung $\frac{1}{m}$, die am Ende der Periode $\frac{mn+s}{m}$ stattfinden wird, falls (x) und (y) noch leben (d. h. falls die Gruppe (x, y) am Ende der Zeit $n+\frac{s}{m}$ noch besteht).

Die Summation nach $n (n = 0, 1, 2 \ldots)$ ergibt den Wert

$$\frac{1}{m^3}v^{\frac{s}{m}}\{m-s)^2 \mathrm{a}_{xy}+s(m-s)\mathrm{a}_{x,y+1}\frac{l_{y+1}}{l_y}$$

$$+s(m-s)\mathrm{a}_{x+1,y}\frac{l_{x+1}}{l_x}+s^2(1+i)(\mathrm{a}_{xy}-1)\}$$

einer Rente vom Betrage $\frac{1}{m}$, deren erste Zahlung nach der Zeit $\frac{1}{m}$ stattfindet, und die stets $\frac{1}{m}$ Jahr nach dem Anfang jedes Jahres und so lange zahlbar ist, als die Gruppe (x, y) besteht. Es ist offenbar

$$a_{xy}^{(m)}=\frac{1}{m^3}\left\{\mathrm{a}_{xy}\sum_{s=1}^{m}(m-s)^2 v^{\frac{s}{m}}+\frac{l_{y+1}}{l_y}\mathrm{a}_{x,y+1}\sum_{s=1}^{m}s(m-s)v^{\frac{s}{m}}\right.$$

$$\left.+\frac{l_{x+1}}{l_x}\mathrm{a}_{x+1,y}\sum_{s=1}^{m}s(m-s)v^{\frac{s}{m}}+(1+i)a_{xy}\right\}.$$

und

$$\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}v^{\frac{s}{m}}=\frac{iv}{j_{(m)}}$$

$$\frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}sv^{\frac{s}{m}}=\frac{i-j_{(m)}(1+i)^{-\frac{1}{m}}}{(1+i)^{1-\frac{1}{m}}j_{(m)}^2}$$

$$\frac{1}{m^3}\sum_{s=1}^{m}s^2 v^{\frac{s}{m}}=\frac{1}{m^3}\{q+4q^2+9q^3+16q^4\cdots+m^2q^m\}$$

$$=\frac{1}{m^3(1-q)}[q+2^2q^2+3^2q^3\cdots+m^2q^m-q^2$$

$$-2^2q^3-\cdots-m^2q^{m+1}]$$

$$=\frac{1}{m^3(1-q)}[2(q+2q^2\cdots+mq^m)$$

$$-(q+q^2+\cdots q^m)-m^2q^{m+1}]$$

$$=\frac{1}{m^3\left(1-v^{\frac{1}{m}}\right)}\left[2\sum_{s=1}^{m}sv^{\frac{s}{m}}-\sum_{s=1}^{m}v^{\frac{s}{m}}-m^2v\cdot v^{\frac{1}{m}}\right]$$

$$=\frac{2i-j_{(m)}(1+i)^{\frac{1}{m}}\left\{2(1+i)^{\frac{2}{m}}-i\right\}-j_{(m)}^2}{(1+i)j_{(m)}^3},$$

wenn $q=v^{\frac{1}{m}}$ ist. Setzen wir der Reihe nach

$$\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}v^{\frac{s}{m}}=A,\quad \frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m}sv^{\frac{s}{m}}=B,\quad \frac{1}{m^3}\sum_{s=1}^{m}s^2v^{\frac{s}{m}}=C$$

und entwickeln die Produkte $(m-s)^2$ und $s(m-s)$, so erhalten wir als genauen Ausdruck der gesuchten Rente:

$$a_{xy}^{(m)}=(A-2B+C)\mathrm{a}_{xy}$$

$$+\left(\frac{l_{y+1}}{l_y}\mathrm{a}_{x:y+1}+\frac{l_{x+1}}{l_x}\mathrm{a}_{x+1:y}\right)(B-C)+(1+i)a_{xy}\cdot C.$$

Diese Formel ist zu kompliziert, um für praktische Zwecke angewandt werden zu können. Einen neuen einfacheren Ausdruck der $a_{xy}^{(m)}$ wollen wir aus ihr ableiten, indem wir $i = 0$ annehmen, d. h. nur den Einfluß der Sterblichkeit in Betracht ziehen und den Einfluß der Ratenzahlung auf die Verzinsung vernachlässigen. Es ist dann

$$A=\frac{m}{m}=1$$

$$B=\frac{1}{m^2}\sum_{1}^{m}s=\frac{m+1}{2m}$$

$$C=\frac{1}{m^3}\sum_{1}^{m}s^2=\frac{(2m+1)(m+1)}{6m^2}$$

und falls man

$$(1+i)(\mathrm{a}_{xy}-1)C = C\mathrm{a}_{xy} - C$$

annimmt,

$$a_{xy}^{(m)} = \left(1 - \frac{(m+1)(m-1)}{3m^2}\right)\mathrm{a}_{xy}$$

$$+\left(\frac{l_{y+1}}{l_y}\mathrm{a}_{x:y+1} + \frac{l_{x+1}}{l_x}\mathrm{a}_{x+1:y}\right)\frac{(m+1)(m-1)}{6m^2} - \frac{(2m+1)(m+1)}{6m^2}.$$

Der Grenzübergang für $m=\infty$ liefert:

$$a_{xy} = \frac{2}{3}\mathrm{a}_{xy} + \frac{1}{6}\left(\frac{l_{y+1}}{l_y}\mathrm{a}_{x:y+1} + \frac{l_{x+1}}{l_x}\mathrm{a}_{x+1:y}\right) - \frac{1}{3}.$$

12. Bei der Ableitung der Werte der ratenweise und der kontinuierlich zahlbaren Rente kann man, dem Beispiel *Woolhouses* folgend, mit Vorteil die Eulersche Summenformel benutzen:

$$h\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}h\Big[f(x)\Big]_a^b + \frac{1}{12}h^2\Big[f'(x)\Big]_a^b + \cdots$$
$$+ [\text{Restglied}]^{1)}.$$

1) Wie man diese ableitet, dürfte als bekannt vorausgesetzt werden; wir wollen aber doch den Beweis derselben hier ganz kurz angeben.

Es folgt aus der Taylorschen Entwicklung von $\int f(x)\,dx$, falls $a+nh=b$ ist:

$$(a)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n-1}\int_{a+rh}^{a+(r+1)h} f(x)\,dx = h\sum_a^b f(x) + \frac{h^2}{2!}\sum_a^b f'(x) + \cdots$$
$$+ (\text{Restglied}),$$

sowie aus derjenigen von $f^{i-1}(x) = \int f^{(i)}(x)\,dx$ $(i=1,2,\ldots)$:

$$(b)\quad \Big[f^{(i-1)}(x)\Big]_a^b = h\sum_a^b f^{(i)}(x) + \frac{h^2}{2!}\sum_a^b f^{(i+1)}(x) + \cdots + (\text{Restglied}).$$

Multiplizieren wir die erste der (b) mit Ah, die zweite mit $Bh^2,\ldots$ und addieren die Summe der resultierenden Relationen zu (a), so erhalten wir:

$$\int_a^b f(x)\,dx + Ah\Big[f(x)\Big]_a^b + Bh^2\Big[f'(x)\Big]_a^b + \cdots = h\sum_a^b f(x)$$
$$+ h^2\left(\frac{1}{2!}+A\right)\sum_a^b f'(x) + h^3\left(\frac{1}{3!}+\frac{A}{2!}+B\right)\sum_a^b f''(x) + \cdots$$

Ist für $x \geqq b$, $f(x)\equiv 0$, und schreibt man x für a, so hat man

$$h\sum_x^\infty f(x) = \int_x^\infty f(x)\,dx + \frac{1}{2}hf(x) - \frac{1}{12}h^2 f'(x) + \cdots. \qquad (10)$$

Es sei $f(x) = v^x l_x = D_x$. Dann ist offenbar auch

$$\frac{1}{f(x)}\sum_x^\infty f(x) = \frac{1}{h} + a_x^{(h)}$$

$$\frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(x)\,dx = \bar{a}_x,$$

oder

$$h\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx + Ah + Bh^2\Big[f'(x)\Big]_a^b + \cdots + (\text{Restglied})$$

falls man $A, B, C\ldots$ so bestimmt, daß

$$\frac{1}{2!}+A=0,\quad \frac{1}{3!}+\frac{A}{2!}+B=0,\quad \frac{1}{4!}+\frac{A}{3!}+\frac{B}{2!}+C=0\ldots.$$

Man findet

$$A=-\frac{1}{2};\quad B=\frac{1}{12}=\frac{B_2}{2!};\quad C=0;\quad D=-\frac{B_4}{4!}=-\frac{1}{720},$$

wo $B_2, B_4, \ldots$ die bekannten Bernoullischen Zahlen sind, welche durch die Reihenentwicklung

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{B_2}{1\cdot 2}x^2 - \frac{B_4}{4!}x^4 + \cdots$$

definiert werden.

Betreffs der Anwendung der Eulerschen Formel auf die Funktion $f(x) = v^x l_x$ ist folgendes zu bemerken. Es existiert *keine* analytische Funktion $f(x)$, die für alle Punkte eines endlichen Intervalls verschwindet und nicht identisch null ist. Die Annahme des Analytischseins der Funktion $f(x)$ und die des Verschwindens derselben Funktion für $x \geqq \omega$ wären also widerspruchsvoll. Praktisch setzt man einfach voraus, daß die Funktion ebenso oft differentiiert werden kann, als es nötig erscheint, oder gründet man sich auf den Umstand, daß analytische Funktionen existieren, welche (wie z. B. der Satz von *Weierstraß* über die Darstellung von stetigen Funktionen durch Reihen von Polynomen lehrt) beliebig wenig von der stetigen Funktion $f(x)$ abweichen; und dies genügt uns.

Die englischen Versicherungsmathematiker bezeichnen mit dem Namen „*Lubbock*sche Formel" eine Formel ohne Restglied, in welcher eine endliche Summe an Stelle des Integrals und endliche Differenzenquotienten an Stelle der Differentialquotienten vorkommen (vgl. *Textbook*, Ch. XXIV, S. 467 ff.). Die Lubbocksche Formel beruht indessen auf denselben Annahmen, wie die Eulersche.

so daß man aus der Gleichung (10), wenn man $h = 1$ annimmt und die höheren Glieder vernachlässigt, erhält:

$$\mathbf{a}_x = 1 + a_x = \bar{a}_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\frac{f'(x)}{f(x)} \tag{11}$$

oder, wegen

$$f'(x) = v^x \frac{dl_x}{dx} - v^x l_x \log v:$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\mu_x + \log v = -(\mu_x + \delta)$$

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta). \tag{12}$$

Setzt man dagegen $h = \frac{1}{m}$ und definiert a_x durch die Gleichung (11), so ergibt sich als Ausdruck der pränumerando und ratenweise zahlbaren Rente $\mathbf{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$

$$\mathbf{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m f(x)} \sum_x^\infty f(x) = \bar{a}_x + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x + \delta)$$

$$= a_x + \frac{m+1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x),$$

so daß

$$a_x^{(m)} = \mathbf{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x) \tag{13}$$

sein wird. Berücksichtigen wir, daß, falls

$$p_{x_1} p_{x_2} \cdots p_{x_3} \cdots = G$$

die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß die Gruppe $\{x_1, x_2 \ldots\}$ fortdauert, so daß $1 - G$ die Wahrscheinlichkeit des Absterbens mindestens eines der zur Gruppe Gehörenden bezeichnet,

$$-\frac{G'}{G} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots$$

die Auflösungsintensität der Gruppe ausdrückt, und daß die Verbindungsrente $a_{x_1:x_2:\ldots}$ formell identisch mit der Leibrente ist, die der Überlebensfunktion $l_{x_1} \cdot l_{x_2} \ldots$ entspricht, so sehen wir unmittelbar die Möglichkeit, die Formeln (12) und (13) auf Gruppen auszudehnen und zu schreiben:

$$\bar{a}_{x_1:x_2:\ldots} = a_{x_1:x_2:\ldots} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots + \delta)$$

$$a^{(m)}_{x_1:x_2:\ldots} = a_{x_1:x_2:\ldots} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots + \delta).$$

Es genügt für praktische Zwecke

$$\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 l_x}$$

anzunehmen.

Ersetzen wir in der Gleichung (13) m durch $\frac{1}{m}$, $(m > 1)$, so entstehen dadurch die neuen Beziehungen

$$a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} = a_x - \frac{m-1}{2} + \frac{m^2-1}{12}(\mu_x + \delta)$$

und

$$a_x = a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} + \frac{m-1}{2} - \frac{m^2-1}{12}(\mu_x + \delta), \tag{14}$$

aus welchen sich die Möglichkeit ergibt, einen angenäherten Ausdruck für a_x zu finden, falls

$$a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{m}{f(x)}[f(x+m) + f(x+2m) + \cdots]$$

$$= m \frac{D_{x+m} + D_{x+2m}}{D_x} + \cdots \tag{15}$$

gegeben ist. Zu Formeln, welche der Gleichung (15) analog sind, und wie diese den Zweck haben, Ausdrücke der a_x, $a_{xy} \ldots$ zu liefern, in welchen nur einige der ganzzahligen Werte des Arguments vorkommen, gelangt man auf Grund der üblichen mechanischen Quadraturformeln (von *Simpson, Cotes, Gauß*)[1]).

13. Es ist nach der Makehamschen Formel

$$l_x = k x^x g^{c^x} \tag{I}$$

oder, falls man

$$s = e^{-\alpha}, \quad g = e^{-\beta}, \quad c = e^{\gamma}, \quad k = C$$

schreibt,

$$l_x = C e^{-\alpha x - \beta e^{\gamma x}}.$$

Da

$$v^x = e^{-\log(1+i)\cdot x} = e^{-\delta x},$$

so ist

$$v^x l_x = C e^{-(\alpha+\delta)x - \beta e^{\gamma x}} = C e^{-\alpha' x - \beta e^{\gamma x}}$$

(wenn $\alpha + \delta = \alpha'$)

1) Vgl. *Hardy, On some formulas for Approximate Summation,* J. of the Inst. Art. XXIV.

$$\frac{v^{x+a}\,l_{x+a}}{v^a\,l_a} = \frac{C e^{-\alpha'(x+a)-\beta e^{\gamma(x+a)}}}{C e^{-\alpha' a-\beta e^{\gamma a}}} = C' e^{-\alpha' x-\beta' e^{\gamma x}}$$

(wenn $\beta' = \beta e^{\gamma a}$, $e^{\beta'} = C$).

Die kontinuierliche Rente

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x l_x}\int_x^\infty v^x l_x\,dx^{1)}$$

erhält im Falle (I) den Ausdruck:

$$\bar{a}_x = C'\int_0^\infty e^{-\alpha' x-\beta' e^{\gamma x}}\,dx.$$

Wir wollen das Integral

$$J = C'\int_0^\infty e^{-\alpha' x-\beta' e^{\gamma x}}\,dx.$$

ausrechnen.

Variiert x von 0 bis ∞, so variiert $z = e^{\gamma x}$ von 1 bis ∞; es ist also, wenn wir zur Abkürzung $\frac{C'}{\gamma} = \bar{C}''$, $\alpha'' = 1 + \frac{\alpha'}{\gamma}$ setzen,

$$J = C''\int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{-\alpha''}\,dz.$$

Ist andererseits $e^{-\beta' z} = u$, $v = z^{-\alpha''}$ und bezeichnen u', u'', ... bzw. $v^{(-1)}$, $v^{(-2)}$) ... die Ableitungen von u nach z, bzw. die Integrale $\int v\,dz$, $\iint v\,dz$, ..., so liefert die partielle Integration

$$\frac{1}{C''}J = \int_1^\infty u v\,dz = \Big[u v^{(-1)}\Big]_1^\infty - \int_1^\infty u'(v^{-1})\,dz$$

$$= \Big[u v^{(-1)} - u' v^{(-2)}\Big]_1^\infty + \int_1^\infty u'' v^{(-2)}\,dz.$$

---

1) Es wäre eigentlich

$$\bar{a}_x = C'\int_0^\omega e^{-\alpha' x-\beta' e^{\gamma x}}\,dx$$

zu setzen. Es läßt sich aber zeigen, daß

$$C'\int_\omega^\infty e^{-\alpha' x-\beta' e^{\gamma x}}\,dx$$

für die in Betracht kommenden Werte von ω, α', β', γ vernachlässigt werden kann.

Wir können also schreiben:

$$J = C''\left[\frac{e^{-\beta' z} z^{1-\alpha''}}{1-\alpha''} + \frac{\beta' e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')}\right]_1^\infty + C''\int_1^\infty \frac{\beta'^2 e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')}\,dz$$

$$= -\frac{C'' e^{-\beta'}}{1-\alpha''} - \frac{\beta' C'' e^{-\beta'}}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')} + \frac{C''\beta'^2}{(1-\alpha'')(2-\alpha'')}\int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\,dz$$

$$= \frac{2-\alpha''+\beta'}{\gamma(\alpha''-1)(2-\alpha'')} - \frac{C''\beta'^2}{(\alpha''-1)(2-\alpha'')}\int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\,dz.$$

Das Integral

$$L = \int_1^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\,dz$$

zerlegen wir in

$$L_1 = \int_0^\infty e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\,dz$$

$$L_2 = \int_0^1 e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''}\,dz$$

auf Grund der Relation

$$\int_1^\infty = \int_0^\infty - \int_0^1.$$

Substituiert man $t = \beta' z$, so wird L_1 zu

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{\beta'}\right)^{2-\alpha''}\frac{dt}{\beta'} = \frac{1}{\beta'^{3-\alpha''}}\int_0^\infty e^{-t} t^{2-\alpha''}\,dt$$

oder, für $n - 1 = 2 - \alpha''$

$$\frac{1}{\beta'^{3-\alpha''}}\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\,dt = \frac{\Gamma(3-\alpha'')}{\beta'^{3-\alpha''}},$$

wo $\Gamma(n)$ das Eulersche Integral zweiter Gattung ist.

L_2 bestimmen wir mittels der Beziehung

$$\int u v\,dz = u v^{(-1)} - u' v^{(-2)} + u'' v^{(-3)} + \cdots + (-1)^n \int u^{(n)} v^{(-n)}\,dz,$$

welche sich aus der wiederholten Anwendung der gliedweisen Integration ergibt. Man erhält:

$$\int e^{-\beta' z} z^{2-\alpha''} dz = e^{-\beta' z}\frac{z^{3-\alpha''}}{3-\alpha''} + \beta' e^{-\beta' z}\frac{z^{4-\alpha''}}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')}$$

$$+ \cdots + \beta'^{n} \int \frac{e^{-\beta' z} z^{2+n-\alpha''}}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\cdots(2+n-\alpha'')}\, dz$$

oder, falls man die Grenzen 0 und 1 einsetzt:

$$L_2 = \frac{e^{-\beta'}}{3-\alpha''}\left\{1 + \frac{\beta'}{4-\alpha''} + \frac{\beta'^2}{(4-\alpha'')(5-\alpha'')} + \cdots\right\} + R_n,$$

wobei

$$R_n = \beta'^{n} \int_0^1 \frac{e^{-\beta' z} z^{2+n-\alpha''}}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\cdots(2+n-\alpha'')}\, dz.$$

Wir bemerken, daß die hypergeometrische Funktion

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a\cdot b}{c}x + \frac{(a+1)a(b+1)b}{c(c+1)}x^2 + \cdots$$

für $a = a$, $b = 1$, $c = c$, $x = \frac{x}{a}$ zu

$$F\left(a, 1, c, \frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{1}{c}x + \left(1 + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{c(c+1)}x^2 + \cdots$$

wird, so daß wir für lim $a = \infty$ erhalten:

$$\lim_{a=\infty} F\left(a, 1, c, \frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{1}{c}x + \frac{1}{c(c+1)}x^2 + \cdots = F(c, x)$$

und für $x = \beta'$, $c = 4 - \alpha''$:

$$F(4-\alpha'', \beta') = 1 + \frac{1}{4-\alpha''}\beta' + \frac{1}{(4-\alpha'')(5-\alpha'')}\beta'^2 + \cdots.$$

Der Vergleich mit dem obigen Ausdruck von L_2 lehrt, daß

$$L_2 = \frac{e^{-\beta'}}{3-\alpha''}F(4-\alpha'', \beta') + R_n.$$

Andererseits ist

$$\frac{(\beta' z)^n}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\cdots(2+n-\alpha'')}$$

das Restglied der im Innern des Kreises vom Radius $|\beta' z| = 1$ überall konvergierenden Reihe $F(3-\alpha'', \beta' z)$.

Ist ε eine beliebig kleine Größe, so kann man immer n derart wählen, daß

$$\left|\frac{(\beta' z)^n}{(3-\alpha'')(4-\alpha'')\cdots(2+n-\alpha'')}\right| < \varepsilon;$$

daraus folgt, daß man auch immer

$$|R_n| < \varepsilon$$

machen kann. Damit erscheinen die Endformeln begründet:

$$L = \frac{\Gamma(3-\alpha'')}{\beta'^{3-\alpha''}} + \frac{e^{-\beta'}}{3-\alpha''}F(4-\alpha'', \beta')$$

$$J = \frac{2-\alpha''+\beta'}{\gamma(\alpha''-1)(2-\alpha'')} - \frac{C''\beta'^2}{(\alpha''-1)(2-\alpha'')}\left[\frac{\Gamma(3-\alpha'')}{\beta'^{3-\alpha''}} + \frac{e^{-\beta'}}{3-\alpha''}F(4-\alpha'', \beta')\right],$$

d. h. wenn $\gamma' = 2 - \alpha'' = 1 - \frac{\alpha'}{\gamma}$

$$J = \frac{\beta'+\gamma'}{\alpha'\gamma'} - \frac{e^{\beta'}\beta'^{1-\gamma'}}{\alpha'\gamma'}\Gamma(1+\gamma') + \frac{\beta'^2}{\alpha'\gamma'(\gamma'+1)}F(2+\gamma', \beta).$$

14. Für $i = 0$ wird

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x l_x}\int_x^\infty v^x l_x dx = \frac{(1+i)^x}{l_x}\int_x^\infty \frac{l_x}{(1+i)^x}dx$$

zur mittleren Lebensdauer

$$E = \frac{1}{l_x}\int_x^\infty l_x dx$$

des Alters x. Es ist auch einleuchtend, daß die positive Differenz $E_x - \bar{a}_x$ mit dem Zinsfuß i wachsen wird. Wir können die Größe $\bar{a}_x$ als die mittlere Lebensdauer auffassen, welche der Überlebensfunktion $L_x = l_x v^x = D_x$ entspricht $(D_0 = l_0)$, mit anderen Worten, wegen der Ungleichung $v < 1$, als die mittlere Lebensdauer einer Generation, die rascher abstirbt, als $y = l_x$.

15. Die postnumerando zahlbaren Renten a_x und $a_x^{(m)}$ wurden unter der Voraussetzung berechnet, daß am Ende des Sterbejahres bzw. des Sterbe $\frac{1}{m}$ Jahres keine Zahlung mehr geleistet wird. Wir wollen hier die Vereinbarung treffen, daß auch im Sterbejahre (bzw. auch im Sterbe $\frac{1}{m}$ Jahre), und zwar unmittelbar nach

dem Tode, eine dem durchlebten Teile dieses Jahres (bzw. dieses $\frac{1}{m}$ Jahres) entsprechende Rate des Rentenbetrages ausbezahlt werde, und nennen die dadurch definierten Renten — welche wir mit $\mathring{a}_x$ bzw. mit $\mathring{a}_x^{(m)}$ bezeichnen — *vollständig.*

Nehmen wir zunächst an, daß alle Sterbefälle in der Mitte der entsprechenden Sterbeperiode (des $\frac{1}{m}$ Jahres) stattfinden. Es ist dann $\frac{1}{2m}$ die Summe, welche man zur selben Zeit zu zahlen hat. Setzt man wie vorhin

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m},$$

so entspricht

$$a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{2m} = a_x + \frac{1}{2}$$

einer Rente vom Betrage $\frac{1}{2m}$ am Anfang des ersten Jahres und $\frac{1}{m}$ am Anfang jedes folgenden $m$ten Teiles des Jahres, so daß für diese Summe jede Zahlung $\frac{1}{2m}$ Jahr früher, wie für $\mathring{a}_x^{(m)}$, stattfinden kann.

Wir werden also setzen:

$$\mathring{a}_x^{(m)} = \frac{a_x + \frac{1}{2}}{(1+i)^{\frac{1}{2m}}}, \tag{16}$$

oder in erster Annäherung:

$$(1+i)^{-\frac{1}{2m}} = 1 - \frac{i}{2m}$$

$$\mathring{a}_x^{(m)} = \left(1 - \frac{i}{2m}\right)\left(a_x + \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{i}{2m}\right) a_x + \frac{1}{2} - \frac{i}{4m},$$

und für $m = 1$:

$$\mathring{a}_x = \frac{a_x + \frac{1}{2}}{\sqrt{1+i}}$$

bzw.

$$\mathring{a}_x = \left(1 - \frac{i}{2}\right) a_x + \frac{1}{2} - \frac{i}{4}.$$

Zu strengeren Resultaten führt die konsequente Durchführung der Annahme, daß sich die Sterbefälle gleichmäßig im m-ten Teile des Jahres verteilen.

In diesem Falle ist dt die Wahrscheinlichkeit, daß (x) im Zeitintervall $(t, t+dt)$ stirbt. Findet der Tod am Ende der Zeit

$$\frac{s}{m} + t$$

$$\left(s = 0, 1, 2 \ldots m-1,\ 0 < t < \frac{1}{m}\right)$$

statt, so ist t der Betrag der Summe, die unmittelbar nach dem Tode gezahlt werden soll, und es ist

$$t\,dt, \quad v^{\frac{s}{m}+t}\,t\,dt, \quad v^{\frac{s}{m}+t-1}\,t\,dt$$

die mathematische Hoffnung von t, bzw. ihre Werte am Anfang und am Ende des Sterbejahres. Es wird also auch

$$\left(\sum_0^{m-1} v^{\frac{s}{m}-1}\right) \int_0^{\frac{1}{m}} v^t t\,dt$$

der wahrscheinliche Wert der Auszahlung t am Ende des Sterbejahres sein. Ferner ist

$$\sum_0^{m-1} v^{\frac{s}{m}-1} = \frac{\frac{1}{v} - 1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{i}{1 - v^{\frac{1}{m}}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{m}} t v^t dt = \left[-\frac{t v^t}{\delta} - \frac{v^t}{\delta^2}\right]_0^{\frac{1}{m}} = -\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{i}{1 - v^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2}\right) = \frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}} = \left(\sum_0^{m-1} v^{\frac{s}{m}-1}\right) \int_0^{\frac{1}{m}} v^t t\,dt.$$

Der Tod kann nun im ersten, zweiten ... Versicherungsjahr eintreten.

Bezeichnen wir mit A_x den sofort zu definierenden wahrscheinlichen Wert der Summe 1, die am Ende des Sterbejahres von (x) zu zahlen ist, so ist

$$\mathring{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)} = \left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}\right) A_x$$

$$\mathring{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}\right) A_x. \tag{17}$$

Für $m = 1$ ist

$$j_{(m)} = m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\} = i,$$

also

$$\mathring{a}_x = a_x + \left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{1}{\delta}\right) A_x = a_x + \frac{i-\delta}{\delta^2} A_x.$$

§ 3. Die Todesfallversicherungen.

16. Es bezeichne A_x den Wert der Summe 1, die am Ende des Sterbejahres von (x), dessen Alter x ist, zu leisten ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahlung am Ende des n^{ten} Versicherungsjahres geschehen wird, ist offenbar identisch mit der Wahrscheinlichkeit, daß (x) das Alter $x + n - 1$ und nicht das Alter $x + n$ erreicht. Sie ist also

$${}_{n-1|}q_x = \frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

und es ist

$$v^{x+n} \frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

ihr Wert am Anfang der Versicherung. Aus

$$v^{x+1} d_x = v D_x - D_{x+1} = C_x$$

$$v^x l_x = D_x, \quad \sum_x D_{x+1} = N_x$$

$$\sum_x C_x = M_x$$

(S. 192, V) folgt

$$v^{x+1} \frac{d_{x+n-1}}{l_x} = \frac{C_{x+n-1}}{D_x}$$

und

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} A_x = \frac{v N_{x-1} - N_x}{D_x} &= v\mathbf{a}_x - (\mathbf{a}_x - 1) = 1 - (1-v)\mathbf{a}_x \\ &= 1 - d\mathbf{a}_x. \end{aligned} \tag{19}$$

Dem Fall $i = 0$ entspricht $v = 1$, $d = 0$

$$A_x = 1.$$

Es ist in der Tat

$$\sum {}_{n-1|}q_x = 1.$$

17. Die Ausdehnung der Gleichungen (18) und (19) auf Gruppen, d. h. die Bestimmung des Wertes $A_{xy\ldots}$ einer Versicherung vom Betrage 1, der am Ende desjenigen Versicherungsjahres fällig wird, in welchem die erste Person der Verbindung stirbt, läßt sich unmittelbar vollziehen. Es ist

$$\frac{l_{x+n-1}}{l_x} \frac{l_{y+n-1}}{l_y} \cdots \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdots\right) = \frac{l_{x+n-1} l_{y+n-1} \cdots - l_{x+n} l_{y+n} \cdots}{l_x l_y \cdots}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß alle Individuen der Gruppe am Anfang und nicht alle Individuen der Gruppe am Ende des n^{ten} Versicherungsjahres am Leben sind.

Führen wir den Diskontierungsfaktor v^n und die Bezeichnungen (S. 194, X)

$$v D_{xy\ldots} - D_{x+1:y+1:\ldots} = C_{xy\ldots}$$

$$\sum_{r=0} C_{x+r\cdot y+r:\ldots} = M_{xy\ldots}$$

ein, so erhalten wir

$$A_{xy\ldots} = \frac{M_{xy\ldots}}{D_{xy\ldots}} = 1 - d\mathbf{a}_{xy\ldots}. \tag{20}$$

18. Versicherungen, bei welchen die Auszahlung der Summe 1 nur stattfindet, falls der Tod des Versicherten oder der zuerst sterbenden Person der versicherten Gruppe innerhalb der nächsten n Jahre *(temporäre Versicherung)* oder nach Verlauf von m Jahren (der Karenzzeit) und innerhalb n Jahren, oder nach m Jahren *(aufgeschobene Versicherung)* eintritt, entsprechen bzw. die Relationen

$$|_m A = \frac{M - M_{(m)}}{D} \tag{21}$$

$${}_n|_{n-m} A = \frac{M_{(m)} - M_{(n)}}{D} \tag{22}$$

$${}_n|A = \frac{M_{(n)}}{D}, \tag{23}$$

die von der Anzahl der Versicherten völlig unabhängig und den Formeln analog sind, die wir für die temporären, die aufgeschobenen und die temporär-aufgeschobenen Renten abgeleitet haben.

Es gilt also wiederum die Beziehung

$$A = |_m A + \frac{D_{(m)}}{D} |_{n-m} A_{(m)} + \frac{D_{(n)}}{D} A_{(n)}. \tag{24}$$

A, M, D entsprechen dem ursprünglichen Alter x bzw. den ursprünglichen Altern $x, y, \ldots$; $A_{(m)}$, $A_{(m)}$, D_m dem Alter $x+m$, bzw. den Altern $x+m, y+m, \ldots$.

Ist $m = n$, so wird Gleichung (24) zu

$$A = |_n A + \frac{D_{(n)}}{D} A_{(n)},$$

man hat also wegen

$$A = 1 - d \cdot \mathbf{a}$$

$$|_n A = 1 - d \cdot \mathbf{a} - \frac{D_{(n)}}{D}(1 - d \cdot \mathbf{a}_{(n)}) = 1 - d \cdot |_n \mathbf{a} - \frac{D_{(n)}}{D}. \tag{25}$$

19. Es sei

$$A_{x,y,\ldots\overline{n|}} = |_n A_{xy\ldots} + \frac{D_{x+n:y+n:\cdots}}{D_{xy\ldots}}.$$

Aus dieser Beziehung folgt wegen Gleichung (25):

$$A_{xy\ldots\overline{n|}} = 1 - d \cdot |_n \mathbf{a}_{xy\ldots} \tag{26}$$

oder, falls es sich um einen einzigen Versicherten (x) handelt,

$$A_{x:\overline{n|}} = 1 - d \cdot |_n \mathbf{a}_x. \tag{27}$$

Die Formeln (26) und (27) definieren den Wert des Kapitals 1, das entweder am Ende der Zeit n, oder, falls der Tod vorher eintritt, am Ende des Sterbejahres des Versicherten bzw. des zuerst sterbenden Versicherten der Gruppe $(xy\ldots)$ zu zahlen ist (*gemischte Versicherung*).

Es ist also auch

$$A_{x\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{xy\ldots\overline{n|}} = \frac{M_{xy\ldots} - M_{x+n:y+n:\cdots} + D_{x+n:y+n:\cdots}}{D_{xy\ldots}}.$$

20. Es bezeichne $(vA)^1_{x\overline{n|}}$ den Wert einer Todesfallversicherung auf (x), die n Jahre dauert, und deren Betrag im r^{ten} Jahre $(r = 1, 2, \ldots, n)$ durch $\alpha \pm \beta(r-1)$ definiert ist.

Es ist

$$(vA)^1_{x\overline{n|}} = \alpha\frac{C_x}{D_x} + (\alpha \pm \beta)\frac{C_{x+1}}{D_x} + (\alpha \pm 2\beta)\frac{C_{x+2}}{D_x}$$

$$+ \cdots + \{\alpha \pm (n-1)\beta\}\frac{C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{\alpha(C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1})$$

$$\pm \beta(C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots (n-1)C_{x+n-1})\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{\alpha(M_x - M_{x+n}) \pm \beta(M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots M_{x+n}$$

$$- nM_{x+n})\}$$

und wegen VI (S. 192)

$$\sum M_x = R_x$$

$$(vA)^1_{x\overline{n|}} = \frac{\alpha(M_x - M_{x+n}) \pm \beta\{R_{x+1} - R_{x+n+1} - nM_{x+n}\}}{D_x}. \tag{28}$$

Wir schreiben, falls $\alpha = \beta = 1$ und der Betrag der Versicherung zunimmt:

$$(vA)^1_{x\overline{n|}} = (IA)^1_{x\overline{n|}}.$$

Es ist

$$(IA)^1_{x\overline{n|}} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}. \tag{29}$$

Mit $(I_{\overline{n|}}A)_x$ bezeichnen wir dagegen den Wert der Versicherung, deren Betrag jährlich um 1 von 1 zu n steigt und dann konstant und gleich n bleibt. Es ist offenbar

$$(I_{\overline{n|}}A)_x = (IA)^1_{x\overline{n|}} + n_n|A_x = \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}. \tag{30}$$

Ist $x + n > \omega$, so ist

$$M_{x+n} = R_{x+n} = 0,$$

und die Gleichungen (28) und (29) werden bzw. zu

$$(vA)_x = \frac{\alpha M_x \pm \beta R_{x+1}}{D_x} \tag{31}$$

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x} = A_x + {}_1|A_x + {}_2|A_x + \cdots. \tag{32}$$

Die Gleichung (30) stimmt für $x + n > \omega$ mit Gleichung (32) überein.

Die Betrachtung von Versicherungen auf das kürzeste Leben von Gruppen führt zu Formeln, welche mit den eben abgeleiteten formell identisch sind.

21. Es bezeichne $A_x^{(m)}$ den Wert einer lebenslänglichen Todesfallversicherung vom Betrage 1, bei welcher das versicherte Kapital nicht am Ende des Sterbejahres, wie wir bei der Bestimmung der Ausdrücke A_{xy}, $(vA)_x$, $A_{xy\ldots}$, $(vA)_{xy\ldots}$ immer angenommen haben, sondern am Ende desjenigen m-tel Jahres zur Auszahlung kommt, in welchem der Tod eintritt.

Findet die Auszahlung der Summe 1 am Ende von $\frac{s}{m}$ Jahren statt, so ist offenbar

$$A_x(1+i)^{\frac{m-s}{m}}$$

der Wert der Versicherung, diskontiert auf den Anfang derselben. Der Unterschied zwischen dieser Versicherung und der normalen Versicherung A_x besteht in der Tat darin, daß bei jener die Kapitalauszahlung $\frac{m-s}{m}$ Jahre früher erfolgt als bei dieser.

Nimmt man an, daß während eines Altersjahres die Todesfälle sich gleichförmig verteilen, so besteht dieselbe Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Todesfall im ersten, zweiten, ..., m-tel des Jahres eintritt. Wir können also $A_x^{(m)}$ durch das arithmetische Mittel aus

$$A_x(1+i)^{\frac{m-1}{m}},\quad A_x(1+i)^{\frac{m-2}{m}},\ldots, A_x$$

definiert denken:

$$A_x^{(m)} = \frac{1}{m}A_x\left\{(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + (1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + 1\right\}$$

$$= A_x\frac{i}{m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right\}} = A_x\frac{i}{j_{(m)}}. \tag{33}$$

Macht man in $A_x^{(m)}$ den Grenzübergang $m=\infty$, so definiert man dadurch die *kontinuierliche Todesfallversicherung*

$$\lim_{m=\infty} A_x^{(m)} = \overline{A}_x,$$

bei welcher die Auszahlung unmittelbar nach dem Tode stattfindet Obige Formel liefert, wegen

$$\lim_{m=\infty} j_{(m)} = \log(1+i) = \delta,$$

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x. \tag{34}$$

Beachten wir, daß aus den Reihenentwicklungen

$$j_{(m)} = i - \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)i^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)i^3\ldots$$

$$\delta = i - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{3}i^3\ldots$$

die bis in die ersten Potenzen von i korrekte Gleichheit der Ausdrücke

$$\frac{i}{j_{(m)}} = \frac{1}{1-\frac{m-1}{2m}i+\cdots}$$

$$\frac{i}{\delta} = \frac{1}{1-\frac{i}{2}+\cdots}$$

mit

$$(1+i)^{\frac{m-1}{2m}}$$

bzw. mit

$$\sqrt{1+i}$$

folgt, so gelangen wir zu den etwas einfacheren, aber weniger korrekten Ausdrücken von $A_x^{(m)}$ und $\overline{A}_x$

$$A_x^{(m)} = A_x(1+i)^{\frac{m-1}{2m}} \tag{35}$$

$$\overline{A}_x = A_x\sqrt{1+i}. \tag{36}$$

Diese Formeln lassen sich direkt begründen. Wird eine gleichmäßige Verteilung der Sterbefälle während eines Altersjahres angenommen, so kann A_x als eine Todesfallversicherung angesehen werden, die durchschnittlich $\frac{1}{2}$ Jahr nach dem Tode ausgezahlt wird, $A_x^{(m)}$ dagegen als eine Versicherung, bei welcher die Zwischenzeit nur $\frac{1}{2m}$ beträgt. Bei $A_x^{(m)}$ erfolgt also die Auszahlung

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2m} = \frac{m-1}{2m}$$

früher als bei der normalen Versicherung A_x, was eben Formel (35) und für $\lim m=\infty$ Formel (36) rechtfertigt.

22. Wird die Differentiierbarkeit der Funktion l_x angenommen, so bezeichnet

$$\frac{l_{x+t}-l_{x+t+dt}}{l_x} = -\frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

die Wahrscheinlichkeit des Ablebens von (x) im Altersintervall $(x + t,\ x + t + dt)$, und

$$-v^t \frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

den diskontierten Wert dieser Wahrscheinlichkeit, bezogen auf die Zeit $t = 0$. Es ist also

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\int_0^\infty v^t dl_{x+t}. \qquad (37)$$

Die partielle Integration liefert

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\left(v^t l_{x+t} - \log v \int v^t l_{x+t} dt\right)_0^\infty.$$

Es ist aber auch

$$\log v = -\delta$$

$$\frac{1}{l_x}\int_0^\infty v^t l_{x+t} dt = \frac{1}{v^x l_x}\int_x^\infty v^x l_x dx,$$

so daß die Relation

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}(-l_x + \delta l_x \bar{a}_x) = 1 - \delta \cdot \bar{a}_x \qquad (38)$$

besteht. Setzen wir für $\bar{a}_x$ den Wert

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i(1 - ia_x)}{(1+i)\delta^2}$$

ein und beachten, daß

$$1 - ia_x = 1 + i - i\mathbf{a}_x$$

$$1 - d \cdot \mathbf{a}_x = A_x,$$

so bekommen wir den schon erhaltenen Ausdruck von $\bar{A}_x$:

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta(1-i)}(1 - ia_x) = \frac{i}{\delta} A_x.$$

23. Ganz analog ist

$$\frac{l_{y+t}}{l_y}\frac{l_{z+t}}{l_z}\cdots\frac{l_{x+t} - l_{x+t+dt}}{d_x} + \frac{l_{y+t} - l_{y+t+dt}}{l_y}\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{l_{z+t}}{l_z} + \cdots = -\frac{1}{l_x l_y l_z \ldots}\frac{d(l_{x+t} l_{y+t} l_{z+t} \ldots)}{dt}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das zuerst sterbende Individuum der Gruppe im Intervall $(t,\ t + dt)$ stirbt. Es wird also

$$-\frac{1}{l_x l_y l_z \ldots}\int_0^\infty v^t d[l_{x+t} l_{y+t} l_{z+t} \ldots] \qquad (39)$$

den Wert des Kapitals 1 ausdrücken, welches unmittelbar nach dem Tode des zuerst sterbenden Individuums der Gruppe $(x,\ y,\ z, \ldots)$ auszuzahlen ist. Integriert man wieder partiell, so findet man, genau wie für einzelne Leben,

$$\bar{A}_{xyz\ldots} = 1 - \delta \cdot \bar{a}_{xyz\ldots}. \qquad (40)$$

24. Die Relation

$$\bar{A} = 1 - \delta \cdot \bar{a},$$

welche für einzelne und verbundene Leben gilt, erlaubt einen von der Anzahl der Versicherten unabhängigen Ausdruck für $\mathring{a}^{(m)}$ abzuleiten.

Wir setzen

$$\int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t} dt \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t} l_{y+t} \cdots dt$$

gleich $\bar{N}$,

$$D - \delta\bar{N} = \bar{M}.$$

Tritt der Todesfall im Zeitintervall $\left(\frac{s}{m} + t,\ \frac{s}{m} + t + dt\right)$ ein, $\left(s = 0, 1, \ldots, t < \frac{1}{m}\right)$, so wird bei $\mathring{a}^{(m)}$ eine um t größere Summe ausgezahlt, als bei $a^{(m)}$; der wahrscheinliche Wert dieser komplementären Auszahlung, bezogen auf den Anfang der Versicherung, beträgt

$$-\frac{1}{D}\int_0^{\frac{1}{m}} t\, d\bar{M}_{\left(\frac{s}{m}+t\right)}.$$

Die Variable s kann nun alle ganzzahligen Werte 0, 1, 2, ... durchlaufen; dementsprechend ist

$$D\left(\mathring{a}^{(m)} - a^{(m)}\right) = -\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{s=\infty}\int_0^{\frac{1}{m}} t\, d\bar{M}_{\frac{s}{m}+t}.$$

Aus dieser Relation und aus

$$\int_0^{\frac{1}{m}} t\,d\overline{M}_{\frac{s}{m}+t} = \overline{M}_{\frac{s+1}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}} \overline{M}_{\frac{s}{m}+t}\,dt$$

folgt:

$$D(\mathring{a}^{(m)} - a^{(m)}) = -\frac{1}{m}\left(\overline{M}_{\frac{1}{m}} + \overline{M}_{\frac{2}{m}} + \cdots\right)$$

$$+\int_0^{\frac{1}{m}} dt\left(\overline{M}_t + \overline{M}_{\frac{1}{m}+t} + \cdots\right) = \frac{1}{m}\overline{M} - \frac{1}{m}\sum_{s=0}^{s=\infty}\overline{M}_{\frac{s}{m}} + \int_0^{\infty}\overline{M}_t\,dt,$$

was wir auch schreiben können, indem wir die *Eulersche Summenformel*

$$h\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}h\Big[f(x)\Big]_a^b + \frac{1}{12}h^2\Big[f'(x)\Big]_a^b$$

$$- \cdots \pm \text{(Restglied)}$$

anwenden, und $f''(x)$, $f'''(x)\ldots$ als zu vernachlässigende Größen voraussetzen:

$$D(\mathring{a}^{(m)} - a^{(m)}) = \frac{1}{2m}\overline{M} + \frac{1}{12m^2}\frac{d\overline{M}}{dt} = \frac{1}{2m}\overline{M} - \frac{\mu}{12m^2}D,$$

wegen

$$\frac{d\overline{M}}{dl} = \frac{d(D - \delta\overline{N})}{dt} = \frac{dD}{dt} - \delta\frac{d\int D\,dt}{dt} = \frac{dD}{dt} + \delta D$$

$$= -(\mu + \delta)D + \delta D = -\mu D$$

$$(\delta = \log v,\ \mu = \mu_x \ \text{ bzw. } = \mu_{xy\ldots}).$$

Wir erhalten dadurch die Endformeln:

$$\mathring{a}^{(m)} = a^{(m)} + \frac{1}{2m}\frac{\overline{M}}{D} - \frac{1}{12m^2}\frac{\mu\cdot D}{D} = a^{(m)} + \frac{1}{2m}\overline{A} - \frac{\mu}{12m^2} \quad (41)$$

$$= a^{(m)} + \frac{1}{2m}(1 - \delta\bar{a}) - \frac{\mu}{12m^2} \quad (42)$$

$$= \bar{a}_m\left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) + \frac{\delta}{12m^2}. \quad (43)$$

Gleichung (43) läßt sich ohne Schwierigkeit aus (41) und (42) folgern.

§ 4. Verbindungsrenten und -Kapitalversicherungen bis zu einem späteren Tode. — Gegenseitige Überlebensrenten und Versicherungen.

25. Es bezeichne $a_{\frac{r}{xy\ldots(m)}}$ den Wert der postnumerando jährlich zahlbaren Rente vom Betrage 1, welche so lange läuft, als mindestens r der m ursprünglich versicherten Personen (x), (y), ... noch am Leben sind.

Mit ${}_np_{\frac{r}{xy\ldots(m)}}$ haben wir die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, daß nach n Jahren mindestens r von m Individuen noch leben; es ist also

$$a_{\frac{r}{xy\ldots(m)}} = \sum_{n=1} v_n{}^n p_{\frac{r}{xy\ldots(m)}}. \quad (44)$$

Aus der symbolischen Gleichung

$${}_np_{\frac{r}{xy\ldots(m)}} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r} = Z^r - \binom{r}{1}Z^{r-1} + \binom{r}{2}Z^{r-2} - \cdots,$$

wo Z^k die Summe aller ${}_np_{xy\ldots(k)}$, also die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Zusammenleben aller k Kombinationen von je k Personen der Verbindung nach n Jahren bezeichnet, (vgl. S. 186) geht hervor, daß sich $a_{\frac{r}{xy\ldots(m)}}$ linear ausdrücken läßt durch die Verbindungsrenten $a_{xy\ldots(k)}$ für alle Werte $k = r$, $r+1, \ldots, m$.

Ist $r = 1$, so schreibt man einfach $a_{\overline{xy\ldots(m)}}$; die Rente wird ausgezahlt, solange noch ein Überlebender aus der Verbindung vorhanden ist; ist $r = m$, so hat man einfach

$$a_{\frac{m}{xy\ldots(m)}} = a_{xy\ldots(m)}.$$

Der Wert $a_{\frac{[r]}{xy\ldots(m)}}$ einer Rente vom Betrage 1, welche postnumerando so lange zu zahlen ist, als gerade r der m Personen (x), (y)... am Leben sind, d. h. vom $m-r$-ten bis zum $m-r+1$-ten Tode, läßt sich entweder als Differenz zwischen $a_{\frac{r-1}{xy\ldots(m)}}$ und $a_{\frac{r}{xy\ldots(m)}}$ ausdrücken:

$$a_{\frac{[r]}{xy\ldots(m)}} = a_{\frac{r-1}{xy\ldots(m)}} - a_{\frac{r}{xy\ldots(m)}}, \quad (45)$$

oder direkt auf Grund der Relation

$$a_{\overline{xy\cdots(m)}}^{[r]} = \sum_{n=1} v^n {}_n p_{\overline{xy\cdots(m)}}^{[r]} ;$$

dabei bedeutet ${}_n p_{\overline{xy\cdots(m)}}^{[r]}$ die Wahrscheinlichkeit, daß von den m Personen nach n Jahren genau r am Leben sind, und es ist (vgl. S. 184)

$${}_n p_{\overline{xy\cdots(m)}}^{[r]} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} = Z^r - \binom{r+1}{1} Z^{r+1} + \cdots .$$

Es gilt also für die Größe $a_{\overline{xy\cdots(m)}}^{[r]}$ dasselbe, was wir für $a_{\overline{xy\cdots(m)}}^{r}$ bemerkten: ihr Wert läßt sich linear durch die Renten $a_{xy\cdots(k)}$ ausdrücken, wobei k alle ganzzahligen Werte des Intervalls (r, m) annimmt.

26. Es bezeichne $A_{\overline{xy\cdots(m)}}^{r}$ den Wert der Kapitalversicherung vom Betrage 1, zahlbar am Ende des Jahres, in welchem der $m-r$-te Todesfall eintritt, d. h. die ursprüngliche Gruppe von m Personen $(x, y, \ldots, (m))$ sich auf r Individuen reduziert. Man sieht unmittelbar, daß

$$A_{\overline{xy\cdots(m)}}^{r} = 1 - d\left(1 + a_{\overline{xy\cdots(m)}}^{r}\right) = 1 - d \cdot \mathbf{a}_{\overline{xy\cdots(m)}}^{r} . \qquad (46)$$

Für die Summe 1 kauft man eine ewige Rente i, die am Ende jedes Jahres zahlbar ist, für $A_{\overline{xy\cdots(m)}}^{r}$ eine Rente ebenfalls vom Betrage i, die aber erst am Ende *des* Jahres ausgezahlt zu werden beginnt, in welchem der $m-r$-te Todesfall eingetreten ist. Der Differenz $1 - A_{\overline{xy\cdots(m)}}^{r}$ entspricht also die postnumerando zahlbare Rente i, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die pränumerando zahlbare Rente $\frac{i}{1+i} = d$, welche zahlbar ist, solange mehr als r Individuen noch am Leben sind. Damit erscheint Formel (46) bewiesen.

Die hier benutzte Schlußfolgerung ist ganz allgemein und läßt sich unmittelbar auf Kapitalversicherungen auf einzelne Leben, sowie auf Kapitalversicherungen auf das kürzeste Leben, sowie allgemein auf Leistungen ausdehnen, die von beliebigen künftigen Ereignissen abhängen. Sie zeigt den strikten Zusammenhang

zwischen Renten und Kapitalversicherungen, den wir rein algebraisch bewiesen hatten.

27. Es lohnt sich, diese Beziehung zwischen Renten $\mathbf{a}$ und Kapitalversicherungen A näher zu betrachten und die Grenzen ihrer Gültigkeit zu bestimmen. Nehmen wir an, daß ein gewisses Ereignis, das wir nicht näher zu definieren brauchen, entweder im ersten oder im zweiten Jahre, mindestens aber einmal und nur einmal eintritt. Es seien

$$q(1) \quad \text{bzw.} \quad q(2) \ldots q(n)$$

die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens im ersten, bzw. im zweiten, im n^{ten} Jahre; es ist also

$$q(1) + q(2) + \cdots q(n) = 1 . \qquad \text{(a)}$$

Sind

$$\varphi(0), \varphi(1), \ldots \varphi(2), \ldots \varphi(n)$$

positive Zahlen, so ist

$$\Phi = \sum_{r=1}^{r=n} q(r)\, \varphi(r)$$

der wahrscheinliche Wert einer Auszahlung, deren jetziger Betrag von der Eintrittszeit des Ereignisses abhängt und durch $\varphi(r)$ ausgedrückt wird. Weiterhin bedeutet

$$\psi = \sum_{r=1}^{r=n} q(r) \{\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots \varphi(r-1)\}$$

den wahrscheinlichen Wert einer Folge von Auszahlungen, die der Reihe nach unmittelbar, bzw. nach 1, 2, ... $r-1$ Zeiteinheiten stattfinden, und zwar so lange, als das betrachtete Ereignis nicht eingetreten ist. Tritt das Ereignis ein, so hört die Reihe der Auszahlungen (d. h., wie wir auch sagen können, die Rente) auf. Wir können, unbeschadet der Allgemeinheit

$$\varphi(0) = 1$$

annehmen; wir fragen dann, wie $\varphi(r)$ zu definieren ist, damit sich

$$\Phi = \sum_{r=1}^{r=n} q(r)\, \varphi(r), \qquad \psi = 1 + \sum_{r=1}^{r=n} q(r)\, \varphi(r)$$

linear durcheinander ausdrücken lassen, d. h. damit zwischen Φ und ψ (und zwar identisch in n und in den Wahrscheinlichkeiten

$p(r)$) eine Beziehung von der Form

$$\alpha\Phi + \beta\Psi + \gamma = 0$$

besteht, wobei α, β, γ willkürliche Konstanten bezeichnen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß der Homogenitätsfall $\gamma = 0$ auszuschließen ist, denn es würde aus

$$\alpha\Phi + \beta\Psi = 0$$
$$\Phi + h\Psi = 0$$

folgen, wie man leicht sieht:

$$h\varphi(r) = \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots \varphi(r-1)$$
$$\varphi(1) = \frac{1}{h}\varphi(0)$$

und gleichzeitig:

$$h[\varphi(r+1) - \varphi(r)] = \varphi(r)$$
$$\varphi(r) = \frac{1+h}{h}\varphi(r-1) = \left(\frac{1+h}{h}\right)^2 \varphi(r-2) = \cdots$$
$$= \left(\frac{1+h}{h}\right)^r \varphi(0)$$
$$\varphi(1) = \frac{1+h}{h}\varphi(0),$$

also auch:

$$\frac{1+h}{h}\varphi(0) = \frac{1}{h}\varphi(0)$$
$$\frac{1+h}{h} = \frac{1}{h},$$

was eben unmöglich ist.

Wir können also, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, $\gamma \neq 0$ postulieren, und indem wir $-\frac{\alpha}{\gamma}$ und $-\frac{\beta}{\gamma}$ durch α und β ersetzen, nach der Funktion $\varphi(r)$ fragen, welche der Funktionalgleichung

$$\alpha\sum_{r=1}^{r=n}\varphi(r)p(r) + \beta\sum_{r=1}^{r=n}(\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots \varphi(r-1))p(r) = 1. \quad (47)$$

genügt. Gleichung (47) soll bestehen, wie wir auch die Wahrscheinlichkeiten $p(r)$ definieren: setzen wir insbesondere der Reihe nach

$$p(1) = 1,\quad p(2) = p(3) = \cdots = p(n) = 0$$
$$p(2) = 1,\quad p(1) = p(3) = \cdots = p(n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so folgt aus ihr und aus $\varphi(0) = 1$ das System der Gleichungen:

$$\varphi(1) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}$$
$$\varphi(2) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{1-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1-\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(r) = \frac{1-\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{r-1}. \quad (48)$$

Es ist aber auch, für

$$p(r) = 1,\quad p(1) = p(2) = \cdots = p(r-1) = p(r+1) = \cdots = 0$$
$$\varphi(r) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}[\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(r-1)]$$
$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}[\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(r-2)] - \frac{\beta}{\alpha}\varphi(r-1)$$
$$= \varphi(r-1) - \frac{\beta}{\alpha}\varphi(r-1),$$

also

$$\varphi(r) = \varphi(r-1)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \varphi(r-2)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \cdots$$
$$= \varphi(0)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^r = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^r.$$

Aus dem Vergleich dieser Gleichung mit (48) folgt, daß

$$\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^r = \frac{1-\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{r-1}$$
$$1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}$$
$$\alpha = 1$$

und

$$\varphi(r) = (1-\beta)^r = u^r \quad (49)$$

ist, falls

$$1 - \beta = u$$

gesetzt wird. Die Bedingung (49) ist notwendig; daß sie auch hinreichend ist, leitet man unmittelbar aus

$$\sum_{r=1}^{r=n}u^r p(r) + (1-u)\sum_{r=1}^{r=n}\{1 + u + \cdots u^{r-1}\}p(r)$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} u^r p(r) + \sum_{r=1}^{r=n} p(r) - \sum_{r=1}^{r=n} u^r p(r) = 1$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} p(r) = 1$$

ab.

„Genügt das zugrunde gelegte System von Wahrscheinlichkeiten der Forderung (a), so ist dafür, daß

$$\alpha \Phi + \beta \psi = 1$$

ist, notwendig und hinreichend, daß der Barwert $\varphi(r)$ der Auszahlung, die am Ende des r^{ten} Jahres stattfindet, gleich

$$\varphi(r) = (1-\beta)^r$$

sei."

28. Setzen wir nun

$$u = \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} = v^{\frac{1}{m}}, \quad \varphi(r) = v^{\frac{r}{m}}$$

$$\Phi = A^{(m)}, \qquad \psi = m \cdot \mathbf{a}^{(m)}.$$

Wir erhalten

$$A^{(m)} + m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)\mathbf{a}^{(m)} = 1$$

und, falls

$$m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\} = j_{(m)}$$

$$A^{(m)} = 1 - \frac{j_{(m)}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\,\mathbf{a}^{(m)}$$

und falls

$$A^{(1)} = A, \quad \mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{a}, \quad \lim_{m=\infty} A^{(m)} = \bar{A}, \quad \lim_{m=\infty} \mathbf{a}^{(m)} = \bar{\mathbf{a}}$$

$$A = 1 - \frac{i}{1+i}\,\mathbf{a} = 1 - d \cdot \mathbf{a} \tag{50}$$

$$\bar{A} = 1 - \lim_{m=\infty} j_{(m)} \cdot \bar{\mathbf{a}} = 1 - \delta \cdot \bar{\mathbf{a}}. \tag{51}$$

Die Formel (51) hatten wir für besondere Wahrscheinlichkeiten und mit Anwendung des Verfahrens der partiellen Integration abgeleitet: sie läßt sich hier, unabhängig von jeder besonderen

Wahrscheinlichkeitsannahme (außer der (a)) aus der allgemeineren Gleichung (49) ableiten.[1])

29. Es sei $m = 2$, und es seien (x) und (y) die betrachteten Individuen. Es ist wegen (44)

$$a_{\frac{1}{xy}} = a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy} \tag{52}$$

und wegen (50)

$$A_{xy} = 1 - d\mathbf{a}_{\overline{xy}} = 1 - d\mathbf{a}_x + 1 - d\mathbf{a}_y - (1 - d\mathbf{a}_{xy})$$
$$= A_x + A_y - A_{xy}. \tag{53}$$

Die Gleichung (53) hätten wir direkt aus der Betrachtung ableiten können, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Ende des n^{ten} Jahres sowohl (x) wie (y) verstorben sind, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten zu setzen ist, daß beide Individuen im Laufe des n^{ten} Jahres sterben, bzw. daß entweder (x) oder (y) schon vor der Zeit $n-1$ verstorben sind. Sie ist also

$${}_{n-1|}q_x(1 - {}_{n-1}p_y) + {}_{n-1|}q_y(1 - {}_{n-1}p_x) + {}_{n-1|}q_{xy}$$
$$= {}_{n-1|}q_x + {}_{n-1|}q_y - {}_{n-1|}q_{xy}.$$

Die Einführung des Diskontierungsfaktors v^n und die Summation nach n liefert

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{n=1} v^n_{n-1|}q_x + \sum_{n=1} v^n_{n-1|}q_y - \sum_{n=1} v^n_{n-1|}q_{xy}$$

und damit die Gleichung (53).

Eine durchaus einfache Betrachtung erlaubt andererseits, sowohl (52) als (53) niederzuschreiben: $a_x + a_y$ bezeichnet den Wert einer Rente, deren Betrag 2 ist, solange (x) und (y) leben, und 1, solange entweder nur (x) oder nur (y) am Leben ist. Subtrahieren wir a_{xy}, so reduziert sich der Betrag der Rente auf 1; wir haben eine Rente vom konstanten Betrage 1, die bis zum Tode der beiden Versicherten ausgezahlt wird.

Ganz analog bezeichnet $A_x + A_y$ den Wert der Kapitalversicherung 2, die zur Hälfte am Ende des Sterbejahres von (x), zur anderen Hälfte am Ende des Sterbejahres von (y) auszuzahlen ist. Subtrahieren wir A_{xy}, so reduziert sich die Versicherung auf die Summe 1, welche beim zweiten Todesfall auszuzahlen ist.

1) Vgl. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, Juli 1908. Der Fall von Versicherungen linear variierenden Betrages läßt sich ebenso leicht und allgemein erledigen.

30. Es sei $m = 3$, und es seien (x), (y) und (z) die versicherten Leben. Es ist

$$a_{\overline{xyz}}^{\,2} = a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} - 2\,a_{xyz} \tag{54}$$

$$a_{\overline{xyz}} = a_x + a_y + a_z - (a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) + a_{xyz} \tag{55}$$

$$A_{\overline{xyz}}^{\,2} = A_{xy} + A_{xz} + A_{yz} - 2\,A_{xyz} \tag{56}$$

$$A_{\overline{xyz}} = A_x + A_y + A_z - (A_{xy} + A_{xz} + A_{yz}) + A_{xyz}. \tag{57}$$

31. Folgendes Schema umfaßt alle möglichen Probleme: Es bedeute Z_r die Summe der $\binom{m}{r}$ Renten, die durch die Kombinationen r^{ter} Ordnung von m Leben $(x), (y), \ldots (m)$ definiert werden. Das erste Glied von

$$hZ_1 + kZ_2 + \cdots sZ_{m-1} + tZ_m$$

definiert eine Rente vom Betrage

mh, solange alle m Individuen am Leben sind,

$(m-1)h$, solange nur $m-1$ Individuen am Leben sind, usw.;

das zweite Glied eine Rente vom Betrage

$\binom{m}{2}k$, solange alle m Individuen am Leben sind,

$\binom{m-1}{2}k$, solange nur $m-1$ Individuen am Leben sind, usw.;

das m^{te} Glied eine Rente vom Betrage t, die ausgezahlt werden soll, solange alle m Individuen am Leben sind.

Es ist also

$$\binom{m}{1}h + \binom{m}{2}k + \binom{m}{3}l + \cdots \binom{m}{m-1}s + \binom{m}{m}t$$

der Betrag der Gesamtrente, solange alle m Individuen am Leben sind;

$$\binom{m-1}{1}h + \binom{m-1}{2}k + \cdots + \binom{m-1}{m-1}s,$$

solange nur $m-1$ Individuen am Leben sind, usw. Wir setzen den ersten Gesamtbetrag gleich G_1, den zweiten $= G_2, \ldots$

$$\binom{t}{1}k = G_m.$$

Werden die Größen $G_1, G_2 \ldots G_m$ willkürlich gewählt, so liefert die Auflösung des resultierenden Systems von m Gleichungen das

Wertsystem der Unbekannten $h, k, l, \ldots, s, t$; aus diesen und aus den Z läßt sich der Wert einer Rente zusammensetzen, deren Beträge während des Überlebens von $m, m-1, \ldots 2, 1$ Individuen bzw. durch $G_1, G_2, \ldots, G_m$ definiert sind.

Man sieht unmittelbar, daß zu $a_{\overline{xy\ldots(m)}}$

$$G_1 = G_2 = \cdots = G_m = 1$$

zu $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\,r}$

$$G_1 = G_2 = \cdots = G_r = 1$$

$$G_{r+1} = G_{r+2} = \cdots = G_m = 0;$$

und zu $a_{\overline{xy\ldots(m)}}^{\,[r]}$

$$G_1 = G_2 = \cdots = G_{r-1} = G_{r+1} = \cdots = G_m = 0$$

$$G_r = 1$$

der Reihe nach einander entsprechen.

§ 5. Überlebensversicherungen und -renten.

32. Wir betrachten die Gruppe (x, y): mit $a_{x|y}$ wollen wir die Rente bezeichnen, deren Auszahlung am Ende des Sterbejahres von (x) beginnt und so lange fortgesetzt wird, als (y) am Leben ist. Es ist offenbar

$$a_{x|y} = \sum_{n=1} v_n\, {}^n p_y (1 - {}_n p_x) = \sum_{n=1} v_n\, {}^n p_y - \sum_{n=1} v_n\, {}^n p_{xy} = a_y - a_{xy} \tag{58}$$

sowie

$$|_n a_{x|y} = \sum_{n=1}^{n=n} v_n\, {}^n p_y (1 - {}_n p_x) = |_n a_y - |_n a_{xy} \tag{59}$$

der Wert der auf n Jahre abgekürzten Rente, d. h. der Rente, die nach dem Tode von (x) und bis zum Alter $y + n$ von (y) ausgezahlt wird, und

$${}_n|a_{x|y} = a_{x|y} - |_n a_{x|y} = {}_n|a_y - {}_n|a_{xy} \tag{60}$$

der Wert der Rente, die nicht von dem Alter $y + n$ von (y) und dem Tode von (x) ausgezahlt zu werden beginnt.

Die Abkürzung und der Aufschub der Rente können aber auch darin bestehen, daß überhaupt keine Auszahlung stattfindet, falls das Absterben von (x) nicht vor dem Alter $x + n$ bzw. nicht nach dem Alter $x + n$ eintritt.

In dem zweiten der genannten Fälle hat man es mit einer Rente $a_{x+n|y+n}$ zu tun, die nur dann zur Auszahlung gelangt, wenn beide versicherten Individuen nach n Jahren am Leben sind; ihr Wert ist demnach

$$v_n{}^n p_{xy} a_{x+n|y+n} = {}_nE_{xy}(a_{y+n} - a_{x+y:y+n}); \qquad (61)$$

im zweiten Falle erhält man den gesuchten Wert als Differenz zwischen $a_{x|y}$ und dem Wert der Rente, die wir eben definiert haben. Man erhält:

$$a_{x|y} - {}_nE_{xy}(a_{y+n} - a_{x+n:y+n}).$$

33. Es ist

$${}_tp_y(1 - {}_tp_x) = \frac{l_{y+t}}{l_y}\,\frac{l_x - l_{x+t}}{l_x};$$

läßt man die Variable t stetig variieren und integriert nach ihr, so erhält man:

$$\frac{1}{l_x l_y}\int_0^\infty l_{y+t}(l_x - l_{x+t})\,dt,$$

d. h. den Wert der kontinuierlichen Rente, die unmittelbar nach dem Tode von (x) bis zum Augenblick des Todes von (y) läuft. Wir wollen sie mit $\bar{a}_{x|y}$ bezeichnen.

34. Es sind auch offenbar

$$a_{x|y}^{(m)} = a_y^{(m)} - a_{xy}^{(m)} \qquad (62)$$

$$\mathring{a}_{x|y}^{(m)} = \mathring{a}_y^{(m)} - \mathring{a}_{xy}^{(m)} \qquad (63)$$

die Ausdrücke der ratenweise zahlbaren und der vollständigen Überlebensrente.

Setzt man nach (13)

$$a_y^{(m)} = a_y + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_y)$$

$$a_{xy}^{(m)} = a_{xy} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x + \mu_y),$$

so wird (62) zu

$$a_{x|y}^{(m)} = a_y - a_{xy} + \frac{m^2-1}{12m^2}\mu_x = a_{x|y} + \frac{m^2-1}{12m^2}\mu_x \qquad (64)$$

und für $\lim m = \infty$

$$\bar{a}_{x|y} = a_x - a_{xy} + \frac{1}{12}\mu_x. \qquad (65)$$

Die Größe $\frac{1}{12}\mu_x$ ist so klein, daß man sie praktisch vernachlässigen kann.

Setzt man ferner nach (42)

$$\mathring{a}_y^{(m)} = a_y^{(m)} + \frac{1}{2m}(1 - \delta\bar{a}_y) - \frac{\mu_y}{12m^2}$$

$$\mathring{a}_{xy}^{(m)} = a_{xy}^{(m)} + \frac{1}{2m}(1 - \delta\bar{a}_{xy}) - \frac{\mu_x + \mu_y}{12m^2},$$

so wird die Gleichung (63) zu

$$\mathring{a}_{x|y}^{(m)} = a_x^{(m)} - a_{xy}^{(m)} - \frac{\delta}{2m}(\bar{a}_y - \bar{a}_{xy}) + \frac{\mu_x}{12m^2}$$

$$= a_{x|y}^{(m)} - \frac{\delta}{2m}\bar{a}_{x|y} + \frac{\mu_x}{12m^2},$$

oder, falls wir (65) berücksichtigen,

$$\mathring{a}_{x|y}^{(m)} = a_{x|y}^{(m)} - \frac{\delta}{2m}a_{x|y} + \frac{\mu_x(2 - \delta\cdot m)}{24m^2}$$

und für $m = 1$

$$\mathring{a}_{x|y} = a_{x|y}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\mu_x(2-\delta)}{24} = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\left(a_{x|y} + \frac{1}{12}\mu_x\right). \qquad (66)$$

$\mathring{a}_{x|y}$ bezeichnet den Wert einer vollständigen Rente auf (y), deren erste Zahlung genau ein Jahr nach dem Tode von (x) stattfindet.

35. Es bezeichne $\{x, y, z\}$ eine Gruppe von drei Personen. Wir fragen nach dem Werte der Rente $a_{x|yz}$, die nach dem Tode von (x) beginnt, und so lange ausgezahlt wird, als (y) und (z) beide am Leben sind, bzw. nach dem Werte $a_{x|\overline{yz}}$ der Rente, die beim Ableben von (x) beginnt und so lange gezahlt wird, als (y) und (z) oder eine von beiden Personen noch am Leben ist, bzw. nach dem Werte $a_{xy|z}$ der Rente für z, die beginnt, sobald eine der beiden Personen (x), (y) gestorben ist, bzw. nach dem Wert $a_{\overline{xy}|z}$ der Rente für z, welche erst beginnt, nachdem sowohl (x) als (y) verstorben sind.

Ersetzen wir in (58) y durch yz bzw. durch $\overline{yz}$ und x durch xy bzw. durch $\overline{xy}$, so erhalten wir die leicht zu begründenden Relationen:

$$a_{x|yz} = a_{yz} - a_{xyz}$$

$$a_{x|\overline{yz}} = a_{\overline{yz}} - a_{xyz}$$

$$a_{xy|z} = a_z - a_{xyz}$$

$$a_{\overline{xy}|z} = a_z - a_{z:\overline{xy}} = a_z - (a_{yz} + a_{xy} - a_{xyz}).$$

Die Verallgemeinerung dieser Formeln, d. h. ihre Ausdehnung auf eine beliebige Anzahl von Leben und auf beliebige Gruppenzustände findet unmittelbar statt. Man sieht z. B. gleich, daß

$$a_{xyz|abc} = a_{abc} - a_{xyzabc}$$

$$a_{\overline{xyz}|abc} = a_{abc} - a_{abc:\overline{xyz}}$$

$$a_{\overline{xyz}|\overline{abc}} = a_{\overline{abc}} - a_{\overline{abc}:\overline{xyz}} = a_{\overline{abcxyz}} - a_{\overline{xyz}}.$$

36. Einleuchtende Verallgemeinerungen der (58) sind auch die Relationen

$$\bar{a}_{x|yz} = \frac{1}{l_x l_y l_z}\int_0^\infty v^t l_{y+t} l_{z+t}(l_x - l_{x+t})\,dt = \bar{a}_{yz} - \bar{a}_{xyz}$$

$$\bar{a}_{x|\overline{yz}} = \int_0^\infty v^t\left(\frac{l_{y+t}}{l_y} + \frac{l_{z+t}}{l_z} - \frac{l_{y+t}}{l_y}\frac{l_{z+t}}{l_z}\right)\left(1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}\right)dt = \bar{a}_y + \bar{a}_z$$
$$- (\bar{a}_{yz} + \bar{a}_{yx} + \bar{a}_{xz}) + \bar{a}_{xyz}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}|z} = \frac{1}{l_x l_y l_z}\int_0^\infty v^t(l_x - l_{x+t})\,(l_y - l_{y+t})l_{z+t}\,dt = \bar{a}_z - \bar{a}_{xy}$$
$$- \bar{a}_{yz} + \bar{a}_{xyz}.$$

37. Es bezeichne A^1_{xy} die auf das Leben (x) zugunsten von (y) abgeschlossene Todesfallversicherung, bei welcher das Kapital 1 am Ende des Sterbejahres von (x) dann gezahlt wird, wenn dieser vor (y) stirbt. Wir haben mit ${}_{n-1|}q^1_{xy}$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß (x) im Laufe des n-ten Jahres vor (y) stirbt, und gesehen, daß

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_{xy} - {}_{n}p_{xy} - \frac{{}_{n}p_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{{}_{n}p_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right)$$

(vgl. S. 189). Es ist also

$$A^1_{xy} = \sum_{n=1} v^n_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{1}{2}\sum_{n=1} v^n\left({}_{n-1}p_{xy} - {}_{n}p_{xy} - \frac{{}_{n}p_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{{}_{n}p_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(A_{xy} - \frac{a_{x:y-1}}{p_{y-1}} + \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right).$$

Es ist aber auch, falls man die Wahrscheinlichkeiten ${}_{n}p_{xy}$ mittels l_x und l_y ausdrückt

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{1}{2}\,\frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x}\cdot\frac{l_{y+n-1} + l_{y+n}}{l_y}$$

und für

$$l_{y+n-1} + l_{y+n} = 2l_{y+n-\frac{1}{2}}$$

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{d_{x+n-1}}{l_x}\,\frac{l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_y}$$

einsetzt,

$$A^1_{xy} = \sum_{n=1} v^n\frac{d_{x+n-1}\cdot l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x l_y} = \frac{\Sigma C^1_{xy}}{D_{xy}} = \frac{M^1_{xy}}{D_{xy}}, \qquad (67)$$

wo die Zeichen C^1_{xy} und M^1_{xy} als gemäß XI und XII von S. 194 definiert anzusehen sind.

Aus

$$A^1_{xy} = \frac{1}{2}\left(A_{xy} - \frac{a_{y-1:x}}{p_{y-1}} + \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}}\right)$$

$$A_{x\overset{1}{y}} = \frac{1}{2}\left(A_{xy} - \frac{a_{x-1:y}}{p_{x-1}} + \frac{a_{x:y-1}}{p_{y-1}}\right)$$

folgt

$$A^1_{xy} + A_{x\overset{1}{y}} = A_{xy}.$$

In der Tat ist die Summe der Werte der Überlebensversicherungen auf den Tod von (x), falls (x) vor (y) stirbt, und auf den Tod von (y), falls (y) vor (x) stirbt, gleich dem Werte der Todesfallversicherung auf den ersten Tod überhaupt.

Es sei A^2_{xy} der Wert des Kapitals 1, das am Ende des Sterbejahrs von (x), und nur, falls (x) nach (y) stirbt, ausgezahlt wird. Zur Berechnung von A^2_{xy} kann die Beziehung herangezogen werden

$$A^1_{xy} + A^2_{xy} = A_x.$$

Offenbar ist $A^1_{xy} + A^2_{xy}$ eine Versicherung, bei welcher die Auszahlung am Ende des Sterbejahres von (x) stattfindet, ob nun (y) vorher verstorben ist oder nicht.

Daß, wenn der Zinsfuß $i \neq 0$,

$$A_{x\overset{1}{y}} - A^2_{xy} > 0,$$

braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden. Ist dagegen $i = 0$, so ist

$$A^2_{xy} = A_{x\overset{1}{y}} = Q_{x\overset{1}{y}}$$

wo $Q_{x\overset{1}{y}}$ als gemäß (16) (S. 189) definiert zu verstehen ist.

38. Wird die Verbindung (x, y, z) angenommen, und bezeichnet A^1_{xyz} den Wert der Versicherung, bei welcher das Kapital nur in dem Falle ausgezahlt wird, daß (x) vor (y) und vor (z) stirbt, so ist wegen der S. 190 bewiesenen Formel

$$A^1_{xyz} = \sum_{n=1} v^n |_{n-1}|q^1_{xyz}| = \frac{1}{3}\left(A_{xyz} - \frac{a_{x:y-1:z-1}}{p_{y-1:z-1}} + \frac{a_{x-1:y:z}}{p_{x-1}}\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{a_{x-1:y:z}}{p_{x-1:y-1}} - \frac{a_{x:y:z-1}}{p_{z-1}} + \frac{a_{x-1:y:z-1}}{p_{x-1:z-1}} - \frac{a_{x:y-1:z}}{p_{y-1}}\right). \quad (68)$$

Ersetzen wir in den Formeln (18) und (19) (S. 190) ${}_{n-1}|q$ durch $v^n \cdot {}_{n-1}|q$, so bekommen wir der Reihe nach:

$$A^2_{x\underset{1}{y}z} = A^1_{xz} - A^1_{xyz}$$

$$A^2_{xyz} = A^1_{xy} + A^1_{xz} - 2A^1_{xyz}$$

$$A^3_{xyz} = A_x - A^1_{xy} - A^1_{xz} + A^1_{xyz}$$

$$A^1_{x:\overline{yz}} = A^1_{xyz} + A^2_{xyz}$$

$$A^{\;1}_{\overline{xy}:z} = A^2_{xy\underset{1}{z}} + A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z},$$

wo die Buchstaben A den Wert der Auszahlungen bezeichnen, die von den durch die entsprechenden Q definierten Ereignissen abhängen.

39. $$-\frac{1}{l_x l_y} l_{y+t} d l_{x+t} = -\frac{1}{l_x l_y} l_{y+t}\left(\frac{\partial}{\partial t} l_{x+t}\right) dt$$

drückt die Wahrscheinlichkeit aus, daß (x) und (y) zur Zeit t am Leben sind, und daß (x) im unendlich kleinen Zeitintervall $(t, t + dt)$ stirbt. Es ist also auch

$$-\frac{1}{l_x l_y}\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} l_{x+t}\right) l_{y+t} v^t dt = \overline{A}^1_{xy} \quad (69)$$

der Wert der Versicherung, deren Summe unmittelbar nach dem Tode von (x), falls (y) noch am Leben ist, ausgezahlt werden soll.

Aus

$$l_x l_y \bar{a}_{xy} = \int_0^\infty l_{x+t} l_{y+t} v^t dt$$

$$l_y \frac{\partial}{\partial x}(l_x \bar{a}_{xy}) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x} l_{x+t}\right) l_{y+t} v^t dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} l_{x+t}\right) l_{y+t} v^t dt = -l_x l_y \overline{A}^1_{xy}$$

folgt

$$\overline{A}^1_{xy} = -\frac{1}{l_x}\frac{\partial(l_x \bar{a}_{xy})}{\partial x}$$

oder, wegen

$$\frac{\partial}{\partial x}(l_x \bar{a}_{xy}) = \frac{d l_x}{dx}\bar{a}_{xy} + l_x \frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{xy}$$

$$-\frac{d l_x}{dx}\frac{1}{l_x} = \mu_x$$

$$\overline{A}^1_{xy} = \mu_x \bar{a}_{xy} - \frac{\partial \bar{a}_{xy}}{\partial x}. \quad (70)$$

40. Wird in der Newtonschen Interpolationsformel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x^0)}{1 \cdot h}\Delta f(x_0) + \cdots$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)\cdots(x - x_0 - \overline{h - 1h})}{h^n \cdot n!}\Delta^n f(x_0)$$

$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^4 f(x_0) = \cdots = 0$$

angenommen, so erhält man:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{1 \cdot h} + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\, h^2}(x - x_0 - h)$$

und für $\lim x = x_0$:

$$f'(x) = \frac{\Delta f(x_0)}{1 \cdot h} - \frac{\Delta^2 f(x_0)}{1 \cdot 2 \cdot h}$$

und

$$2 f'(x) = 2\Delta f(x_0) - \Delta^2 f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\{f(x + 1) - f(x - 1)\}$$

falls $h = 1$. Setzen wir also voraus, daß $\bar{a}_{xy}$ eine Funktion zweiten Grades von x ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \bar{a}_{xy}}{\partial x} = -\frac{1}{2}(\bar{a}_{x-1:y} - \bar{a}_{x+1:y})$$

und

$$\overline{A}^1_{xy} = \mu_x \bar{a}_{xy} + \frac{1}{2}(\bar{a}_{x-1:y} - \bar{a}_{x+1:y}). \quad (71)$$

41. Nach der Makehamschen Hypothese ist

$$\mu_x = A + Bc^x$$

$$_tp_x = e^{-\int\limits_x^{x+t}\mu_x dx} = e^{-\int\limits_x^{x+t}(A+Bc^x)} = e^{-At-\frac{B}{\log c}(c^t-1)c^x}$$

$$_tp_{xy} = e^{-2At-\frac{B}{\log c}(c^t-1)(c^x+c^y)},$$

also auch, falls man logarithmiert und $-A = \log s$, $-\frac{B}{\log c}(c^t-1) = \log G$ setzt:

$$\log {_tp_x} = t \log s + c^x \log G$$

$$\log {_tp_{xy}} = 2t \log s + (c^x + c^y) \log G$$

$$\frac{\log_t p_x - t\log s}{\log_t p_{xy} - 2t\log s} = \frac{1}{1+c^{y-x}}$$

$$\log_t p_x = \frac{1}{1+c^{y-x}} \log {_tp_{xy}} - t \log s \frac{1-c^{y-x}}{1+c^{y-x}}$$

$$\frac{1}{_tp_x}\frac{\partial_t p_x}{\partial t} = \frac{1}{1+c^{y-x}}\frac{1}{_tp_{xy}}\frac{\partial_t p_{xy}}{\partial t} - \log s \frac{1-c^{y-x}}{1+c^{y-x}} dt$$

$$_tp_y \partial_t p_x = \frac{1}{1+c^{y-x}} \partial_t p_{xy} - \frac{1-c^{y-x}}{1+c^{y-x}} \log s \cdot {_tp_{xy}} dt.$$

Setzen wir in

$$-\frac{1}{l_x l_y}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial}{\partial t} l_{x+t}\right) l_{y+t} v^t dt = -\int\limits_0^\infty v^t {_tp_y}\left(\frac{\partial_t p_x}{\partial t}\right) dt$$

den eben erhaltenen Wert von $_tp_y \partial_t p_x$ ein, so bekommen wir:

$$\bar{A}^1_{xy} = -\frac{1}{1+c^{y-x}}\int\limits_0^\infty v^t \frac{\partial_t p_{xy}}{\partial t} dt + \frac{1-c^{y-x}}{1+c^{y-x}} \log s \int\limits_0^\infty v^t {_tp_{xy}} dt$$

$$= \frac{1}{1+c^{y-x}} \bar{A}_{xy} + \frac{1-c^{y-x}}{1+c^{y-x}} \log s \cdot \bar{a}_{xy}. \qquad (72)$$

42. Ist dagegen einfach

$$\mu_x = Bc^x$$

nach der Gompertzschen Hypothese, so ist auch $\log s = 0$ und

$$\bar{A}^1_{xy} = \frac{1}{1+c^{y-x}} \bar{A}_{xy}. \qquad (73)$$

43. Die Ausdehnung der Formeln (72) und (73) auf eine beliebige Anzahl m von Leben $(x, y, \ldots (m))$ findet ohne Schwierigkeit statt; im Falle der Gleichung (72) braucht man nur die aus $m-1$ Leben bestehende Gruppe $(y, z \ldots (m))$ als ein einziges Leben u zu betrachten und zu setzen:

$$c^y + c^z + \cdots + c^{(m)} = K_u,$$

so daß man für

$$\log_t p_u = (m-1)t \log s + K_u \log G$$

erhält:

$$\bar{A}^1_{xyz\cdots(m)} = \frac{c^x}{c^x + K_u} \bar{A}_{xy\cdots(m)} - \frac{(m-1)K_u - c^x}{c^x + K_u} \log s \cdot \bar{a}_{xy\cdots(m)}$$

und

$$\bar{A}^1_{xyz\cdots(m)} = \frac{c^x}{c^x + K_u} \bar{A}_{xy\cdots,m)}$$

für $\log s = 0$.

Es ist ferner und zwar unabhängig von jeder Hypothese betreffs der Funktion l_x (außer ihrer Differentiierbarkeit)

$$A^1_{xy\cdots(m)} = \mu_x \bar{a}_{xy\cdots(m)} - \frac{\partial \bar{a}_{xy\cdots(m)}}{\partial x}$$

gemäß der Gleichung (70).

Aus den vorhergehenden Untersuchungen folgt, daß sich die Werte aller Überlebensversicherungen mit Hilfe von A^1_{xy}, $A^1_{xy\cdots(m)}$ und den fundamentalen biometrischen Funktionen μ_x, $_np_x, \ldots$ ausdrücken lassen. Da ihrerseits die A^1_{xy}, $A^1_{xy\cdots(m)}$ sich immer aus den Renten a_{xy}, $a_{xy\cdots(m)}$, $\bar{a}_{xy}, \ldots \bar{a}_{xy\cdots(m)}$ oder aus den Todesfallversicherungen A_{xy}, $A_{xy}, \ldots \bar{A}_{xy}$, $\bar{A}_{xy\cdots(m)}$ zusammensetzen lassen, und zwischen den A und den entsprechenden a die allgemeingültigen Relationen

$$A = 1 - d(1 + a)$$

$$\bar{A} = 1 - \delta\bar{a}$$

bestehen, so können wir, von einer beliebigen der Wertreihen $a_{xy\ldots} A_{xy\ldots} A^1_{xy\ldots}$ ausgehend, alle übrigen angeben.[1])

---

1) Der Leser wird gut tun, die im Texte abgeleiteten Formeln numerisch zu verwerten, indem er das am Ende des Bandes gegebene Tafelmaterial benutzt. Die Tafel H^M bietet den großen Vorzug, nach der Makehamschen Formel ausgeglichen zu sein, und somit die strenge Zurückführung von Gruppen ungleichaltriger auf Gruppen gleichaltriger

§ 6. Die Grundgrößen der Invaliditätsversicherung.

44. In diesem Paragraphen werden wir nur mit postnumerando zahlbaren Renten zu tun haben. Es behalte a_x die bekannte Bedeutung, und es sei

$a_{aa}(x)$ der wahrscheinliche gegenwärtige Wert der Rente vom Betrage 1 für einen Aktiven, zahlbar, solange er aktiv ist;

$a_{ai}(x)$ der Wert der Rente eines Aktiven, deren Zahlung nach eventuell eingetretener Invalidität beginnt und dann bis zum Tode dauert;

$a_a(x)$ der Wert der Rente eines Aktiven, zahlbar, solange der Aktive als Aktiver oder als Invalider lebt;

$a_i(x)$ der Wert der Rente eines Invaliden, zahlbar bis zum Tode.

Die Werte von $a_{aa}(x)$ und $a_i(x)$ (d. h. der *Aktivitätsrente* bzw. der *Invalidenrente*) gehen aus der Gleichung

$$a_x = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \cdots$$

direkt hervor, falls man l_x durch $l_a(x)$ bzw. durch $\psi(x)$ ersetzt.

Es ist bekannt (vgl. S. 138), daß $l_a(x)$ die Zahl der Aktiven des Alters x bezeichnet, die aus $l_a(x_0)$ Aktiven des Alters $x_0 < x$ hervorgehen, und daß $\psi(x)$ die Zahl der Überlebenden des Alters x von $\psi(x_0)$ Invaliden des Alters x_0 ausdrückt.

Führen wir der Kürze halber die neuen Kommutationssymbole ein

$$D_a(x) = v^x l_a(x), \quad D_i(x) = v^x \psi(x)$$
$$N_a(a) = \sum_{(r=1)} D_a(x+r), \quad N_i(x) = \sum_{(r=1)} D_i(x+r),$$

so erhalten wir

$$a_{aa}(x) = \frac{N_a(x)}{D_a(x)}, \quad a_i(x) = \frac{N_i(x)}{D_i(x)}.$$

45. Es ist $p_{ai}(x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Aktiver des Alters x im Laufe des Jahres Invalid wird und das

zu gestalten. Es wird indessen nicht zwecklos sein, dieselben Methoden der Zurückführung auf das aus der deutschen Sterbetafel abgeleitete Zahlenmaterial anzuwenden, um sich einen Begriff von der Größe der damit begangenen Fehler und dadurch von den Grenzen der Anwendbarkeit jener Methoden auf Tafeln zu machen, für welche die Makehamsche Eigenschaft nur angenähert gilt.

Ende des Jahres überlebt. Tritt aber die Invalidität im Laufe des Jahres ein und ist für den Aktiven (x) eine „*Invaliditätsrente*" $a_{ai}(x)$ versichert worden, so ist

$$v(1 + a_i(x))$$

der wahrscheinliche gegenwärtige Wert der an (x) auszuzahlenden Rente. Es ist allgemein

$$\frac{l_a(x+n)}{l_a(x)} p_{ai}(x+n)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (x) erst im Laufe des $\overline{n+1}^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres invalid wird, und daß er das Alter $\overline{x+n+1}$ erreicht. Dieser Möglichkeit entspricht aber der Barwert der an (x) auszuzahlenden Rente

$$v^{1+n}(1 + a_i(x+n+1)).$$

Es wird also zu setzen sein, indem man nach n summiert,

$$a_{ai}(x) = \sum_{n=0}\left[v^{n+1}\frac{l_a(x+n)}{l_a(x)} p_{ai}(x+n)\,(1 + a_i(x+n-1))\right]$$
$$= \frac{v}{D_a(x)}\sum_{n=0} D_a(x+n) p_{ai}(x+n)\{1 + a_i(x+n-1)\}. \quad (74)$$

Setzen wir in Gleichung (74)

$$p_{ai}(x) = W(x)\left(1 - \frac{1}{2}q_i(x)\right) \quad \text{bzw.} \quad p_{ai}(x) = W(x)\frac{1+p_i(x)}{2}$$

(vgl. S. 145, Formeln (74) und S. 142) oder auch

$$p_{ai}(x) = -\frac{W(x)p_i(x)}{1-p_i(x)}\log p_i(x) \quad \text{bzw.} \quad p_{ai}(x) = \frac{2W(x)p_i(x)}{1+p_i(x)}$$

(vgl. S. 145, Formeln (73) und (74)), so werden wir ebenso Ausdrücke für $a_{ai}(x)$ erhalten. Dem ersten dieser Ausdrücke, der am meisten Anwendung findet, entspricht die Beziehung

$$a_{ai}(x) = \frac{v}{D_a(x)}\sum_{n=0} D_a(x+t)\,i(x+t)\left(1 - \frac{q_i(x+t)}{2}\right)(1 + a_i(x+t+1)). \quad (75)$$

Mit den Werten $a_{aa}(x)$ und $a_{ai}(x)$ ist auch der Wert $a_a(x)$ der Rente gegeben, die zu zahlen ist, solange der Aktive (x) als Aktiver oder als Invalider lebt. Denn es ist

$$a_a(x) = a_{aa}(x) + a_{ai}(x). \quad (76)$$

46. Den Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeiten

$$p_{ai}(x) = p_x - p_{aa}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(p_x - p_i(x))$$

$$p_{ai}(x) = p_i(x) - p_{aa}(x) + \frac{l_x}{l_a(x)}(p_x - p_i(x))$$

(vgl. S. 142, Formeln (64) und (65)) werden hier die Beziehungen zwischen Renten entsprechen

$$a_{ai}(x) = a_x - a_{aa}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(a_x - a_i(x)) \qquad (77)$$

$$= a_i(x) - a_{aa}(x) + \frac{l_x}{l_a(x)}(a_x - a_i(x)) \qquad (78)$$

also auch, wegen Gleichung (76)

$$a_a(x) = a_x + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(a_x - a_i(x)) \qquad (79)$$

$$= a_i(x) + \frac{l_x}{l_a(x)}(a_x - a_i(x)). \qquad (80)$$

47. Nehmen wir an, daß die in den ersten n Jahren eintretende Invalidität keinen Anspruch auf Rente gibt, und bezeichne ${}_n|a_{ai}(x)$ den Wert der in diesem Sinne aufgeschobenen Invaliditätsrente.

Dann ist

$${}_n|a_{ai}(x) = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\, a_{ai}(x+n),$$

aber auch, falls $|_n a_{ai}(x)$ die temporäre Invaliditätsrente bezeichnet,

$$|_n a_{ai}(x) + {}_n|a_{ai}(x) \neq a_{ai}(x),$$

und zwar

$$a_{ai}(x) - (|_n a_{ai}(x) + {}_n|a_{ai}(x)) > 0.$$

Denn $a_{ai}(x)$ bezeichnet den Wert der Rente, die nach eingetretener Invalidität lebenslänglich ausgezahlt wird, $|_n a_{ai}(x) + {}_n|a_{ai}(x)$ den Wert der Rente, die nach eingetretener Invalidität spätestens bis zum Alter $x+n$ und nach eingetretener Invalidität ausgezahlt wird, falls der Versicherte nach dem Alter $x+n$ invalid wird.

Soll die Rentenzahlung um n Jahre aufgeschoben, aber auch den Invaliden gewährt werden, die in der Aufschubszeit invalid geworden sind, und bezeichnet ${}_n\|a_{ai}(x)$ den Wert der dadurch definierten Rente, so ist

$${}_n\|a_{ai}(x) = a_{ai}(x) - |_n a_{ai}(x).$$

Es folgt aus der Gleichung (77) und aus der Überlegung, daß

$$a_x - |_n a_x = {}_n|a_x, \quad a_{aa}(x) - |_n a_{aa}(x) = {}_n|a_{aa}(x)$$

$$a_i(x) - |_n a_i(x) = {}_n|a_i(x)$$

ist, daß wir schreiben können

$${}_n\|a_{ai}(x) = {}_n|a_x - {}_n|a_{aa}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}({}_n|a_x - {}_n|a_i(x)).$$

Es ist aber auch

$${}_n\|a_{ai}(x) - {}_n|a_{ai}(x)$$

$$= \frac{1}{D_a(x)}\left(D_{ii}(x+n) - D_{ii}(x)\frac{D_i(x+n)}{D_i(x)}\right)a_i(x+n) \qquad (81)$$

(wobei

$$D_{ii}(x) = v^x l_i(x)$$

gesetzt ist); denn

$$l_i(x+n) - l_i(x)\frac{\psi(x+n)}{\psi(x)}$$

ist die Zahl der Individuen, die aus $l_a(x)$ Aktiven des Alters x hervorgehen und im Altersintervall $(x, x+n)$ invalid werden, und

$$\frac{l_i(x+n)}{l_a(x)} - \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\frac{\psi(x+n)}{\psi(x)}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Aktiver des Alters x vor dem Alter $x+n$ invalid wird: das Produkt

$$v^n\left(\frac{l_i(x+n)}{l_a(x)} - \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\frac{\psi(x+n)}{\psi(x)}\right)a_i(x+n)$$

läßt sich unmittelbar auf die Form des rechten Gliedes der Gleichung (81) zurückführen.

48. Den Notationen gemäß, die wir für die Lebensversicherung eingeführt haben, werden wir mit $a^{(m)}$ die Rente bezeichnen, deren Zahlung ratenweise, und zwar am Ende jedes Zeitabschnittes $\frac{1}{m}$ stattfindet. Ersetzen wir in der Formel von *Woolhouse* (die sich einfach auf die Hypothese gründet, daß die Überlebensfunktion analytisch ist)

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta)$$

(vgl. S. 210, Formel (13)) l_x durch die Überlebensfunktion $l_a(x)$ bzw. $\psi(x)$, und, dementsprechend, μ_x durch die Sterbekräfte $\mu_{aa}(x)$ bzw.

$$\mu_i(x) = -\frac{1}{\psi(x)}\frac{d\psi(x)}{dx},$$

a_x durch $a_{aa}(x)$ bzw. durch $a_i(x)$, so erhalten wir aus ihr die neuen Beziehungen:

$$a_{aa}^{(m)}(x) = a_{aa}(x) + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_{aa}(x) + \delta)$$

$$a_i^{(m)}(x) = a_i(x) + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_i(x) + \delta)$$

und für lim $m = \infty$:

$$\bar{a}_{aa}(x) = \lim_{m=\infty} a_{aa}^{(m)}(x) = a_{aa}(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_{aa}(x) + \delta)$$

$$\bar{a}_i(x) = \lim_{m=\infty} a_i^{(m)}(x) = a_i(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_i(x) + \delta)$$

oder allgemeiner:

$$\bar{a}_{aa}(x) = a_{aa}^{(m)}(x) + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\mu_{aa}(x) + \delta)$$

$$\bar{a}_i(x) = a_i^{(m)}(x) + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\mu_i(x) + \delta).$$

49. Die analogen Ausdrücke für $a_{ai}^{(m)}(x)$, $\bar{a}_{ai}(x)$, $a_a^{(m)}(x)$, $\bar{a}_a(x)$ erhalten wir aus den hier abgeleiteten Beziehungen und aus der Formel (77). Aus dieser Formel, die unabhängig von dem Zahlungsmodus gilt, folgt unmittelbar:

$$a_{ai}^{(m)}(x) = a_x^{(m)} - a_{aa}^{(m)}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(a_x^{(m)} - a_i^{(m)}(x))$$

und, falls man die erhaltenen Ausdrücke von $a_{aa}^{(m)}(x)$ $a_i^{(m)}(x)$ einsetzt und die Gleichung

$$\nu(x) = \mu_{aa}(x) - \mu_x + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(\mu_i(x) - \mu_x)$$

berücksichtigt (vgl. S. 143):

$$a_{ai}^{(m)}(x) = a_{ai}(x) + \frac{m^2-1}{12m^2}\nu(x)$$

also auch, wegen Gleichung (76):

$$a_a^{(m)}(x) = a_{aa}^{(m)}(x) + a_{ai}^{(m)}(x) = a_a(x) + \frac{m-1}{2m}$$
$$- \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_{aa}(x) - \nu(x) + \delta)$$
$$= a_a(x) + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_a(x) + \delta).$$

Lassen wir m ins Unendliche wachsen, so erhalten wir die Gleichungen

$$\bar{a}_{ai}(x) = \lim_{m=\infty} a_{ai}^{(m)}(x) = a_{ai}(x) + \frac{1}{12}\nu(x)$$

$$\bar{a}_a(x) = \lim_{m=\infty} a_a^{(m)}(x) = a_a(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_a(x) + \delta).$$

50. Es kommt in der Praxis häufig vor, daß man den Wert einer Invaliditätsrente zu bestimmen hat, deren Betrag eine Funktion des Alters ist, bei welchem die Invalidität eintritt (was z. B. der Fall ist, wenn die Rente mit den Dienstjahren eines Beamten steigt, der Mitglied einer Pensionskasse ist).

Handelt es sich z. B. um eine in Raten zahlbare Rente, deren Betrag $= \varrho$ ist, wenn die Invalidität nach r vollen Dienstjahren eintritt, die dann aber alle s Jahre um σ steigt, bis sie ein gewisses Maximum $\varrho + k \cdot \sigma$ erreicht hat, von welchem ab sie konstant bleibt, so ist ihr wahrscheinlicher Wert $(v_{\overline{k}|} a_{ai}^{(m)}(x))$

$$(v_{\overline{k}|} a_{ai}^{(m)}(x)) = \varrho \frac{D_a(x+r)}{D_a(x)} a_{ai}^{(m)}(x+r)$$
$$+ \sigma \frac{D_a(x+r+s)}{D_a(x)} a_{ai}^{(m)}(x+r+s)$$
$$+ \sigma \frac{D_a(x+r+2s)}{D_a} a_{ai}^{(m)}(x+r+2s) + \cdots$$
$$+ \sigma \frac{D_a(x+r+ks)}{D_a(x)} a_{ai}^{(m)}(x+r+ks) = (v_{\overline{k}|} a_{ai}(x))$$
$$+ \varrho \frac{D_a(x+r)}{D_a(x)} \frac{m^2-1}{12m^2} \nu(x+r)$$
$$+ \sigma \frac{m^2-1}{12m^2} \Big[\frac{D_a(x+r+s)}{D_a(x)} \nu(x+r+s) + \cdots$$
$$+ \frac{D(x+r+ks)}{D_a(x)} \nu(x+r+ks)\Big],$$

falls

$$(v_{\overline{k}|} a_{ai}(x)) = \varrho \frac{D_a(x+r)}{D_a(x)} a_{ai}(x+r)$$
$$+ \sigma \Big(\frac{D_a(x+r+s)}{D_a(x)} a_{ai}(x+r+s) + \cdots$$
$$+ \frac{D_a(x+r+s)}{D_a(x)} a_{ai}(x+r+ks)\Big)$$

die entsprechende, jährlich zahlbare Rente bezeichnet. Die Differenz

$$(v_{\overline{k}|}\,a_{ai}^{(m)}(x)) - (v_{\overline{k}|}\,a_{ai}(x))$$

ist klein genug, um in der Praxis vernachlässigt werden zu können. Dem Falle, wo die Rente jährlich zunimmt, entspricht der Wert 1 von s.

51. Mit $a_{aa}^{(m)}(x)$ ist der Wert

$$A_{aa}^{(m)}(x) = 1 - \frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{m} + a_{aa}^{(m)}(x)\right)$$

des Kapitals 1 gegeben, das am Ende desjenigen $\frac{1}{m}$ Jahres zu zahlen ist, in welchem der Aktive (x) invalid wird oder als Aktiver stirbt. Es ist ferner

$$A_i^{(m)}(x) = 1 - \frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{m} + a_i^{(m)}(x)\right)$$

der Wert der Kapitalversicherung, zahlbar im Falle des Absterbens des Invaliden (x) am Ende des Zeitabschnittes $\frac{1}{m}$, in welchem er stirbt, und

$$A_a^{(m)}(x) = 1 - \frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{m} + a_a^{(m)}(x)\right)$$

der Barwert der Versicherung 1 für einen Aktiven, zahlbar, wenn er stirbt, sei es als Aktiver, sei es als Invalider.

Wir erhalten für $m = 1$:

$$A_{aa}(x) = 1 - d(1 + a_{aa}(x))$$
$$A_i(x) = 1 - d(1 + a_i(x))$$
$$A_a(x) = 1 - d(1 + a_a(x))$$

und für $\lim m = \infty$:

$$\overline{A}_{aa}(x) = 1 - \delta \cdot \bar{a}_{aa}(x)$$
$$\overline{A}_i(x) = 1 - \delta \cdot \bar{a}_i(x)$$
$$\overline{A}_a(x) = 1 - \delta \cdot \bar{a}_a(x).$$

Denn alle diese Versicherungen lassen sich auf das Schema zurückführen, das wir in der Nr. 27 (S. 229) behandelt haben.

52. Bezeichnet $A_{ai}^{(m)}(x)$ den Barwert der Versicherung 1 auf einen Aktiven, fällig, wenn dieser, nachdem er invalid geworden ist, stirbt, so ist

$$A_{ai}^{(m)}(x) \neq 1 - \frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\left(a_{ai}^{(m)}(x) + \frac{1}{m}\right),$$

und zwar

$$A_{ai}^{(m)}(x) < 1 - \frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\left(a_{ai}^{(m)}(x) + \frac{1}{m}\right). \qquad (82)$$

Die Ungleichung (82) geht aus der Überlegung hervor, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der Aktive in den einzelnen Jahren invalid wird und als Invalider stirbt, keineswegs gleich 1 ist: es ist nicht ausgeschlossen, daß der Aktive im Aktivitätszustande stirbt.

Bezeichnet $A'_{ai}(x)$ den nachher zu definierenden Wert des Kapitals 1, zahlbar, wenn der Aktive invalid wird, so stellt die Differenz

$$A'^{(m)}_{ai}(x) - A_{ai}^{(m)}(x)$$

die Einbuße dar, welche der Aktive (oder seine Familie für ihn) erleidet, wenn die Summe 1 nicht bei der Invalidisierung, sondern zu der Zeit ausgezahlt wird, wo er als Invalider stirbt. Es ist aber leicht zu sehen, daß dieser Verlust gleich $\frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\,a_{ai}^{(m)}(x)$ ist. Es wird also sein:

$$A_{ai}^{(m)}(x) = A'^{(m)}_{ai}(x) - \frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}\,a_{ai}^{(m)}(x),$$

also auch für $m = 1$:

$$A_{ai}(x) = A'_{ai}(x) - d \cdot a_{ai}(x)$$

und für $\lim m = \infty$:

$$\overline{A}_{ai}(x) = \overline{A}'_{ai}(x) - \delta \cdot \bar{a}_{ai}(x).$$

53. Wir wollen nun den Wert $A'^{(m)}_{ai}(x)$ direkt definieren. Es ist $\frac{l_a\left(x+\frac{r}{m}\right)}{l_a(x)}\,w\left(x+\frac{r}{m},\, x+\frac{r+1}{m}\right)$ die Wahrscheinlichkeit, für einen Aktiven des Alters x, im Altersintervall $\left(x+\frac{r}{m},\, x+\frac{r+1}{m}\right)$ in-

valid zu werden; man wird also zu setzen haben:

$$A'^{(m)}_{ai}(x) = \frac{1}{l_a(x)} \sum_{r=0} v^{\frac{r+1}{m}} l_a\left(x + \frac{r}{m}\right) w\left(x + \frac{r}{m}, x + \frac{r+1}{m}\right)$$

und insbesondere:

$$A'_{ai}(x) = \frac{v}{l_a(x)} \sum_{r=0} v^r l_a(x+r) w(x+r)$$

$$\overline{A}'_{ai}(x) = -\frac{1}{l_a(x)} \int_0^\infty v^t l_a(x+t) \nu(x+t)\, dt.$$

Es ist aber $\dfrac{l_a\left(x+\frac{r}{m}\right)}{l_a(x)} q_{aa}\left(x + \frac{r}{m}, x + \frac{r+1}{m}\right)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven des Alters x, im Altersintervall $\left(x + \frac{r}{m}, x + \frac{r+1}{m}\right)$ als Aktiver zu sterben; ist $A'^{(m)}_{aa}(x)$ der Wert des Kapitals 1, zahlbar, falls der Aktive als Aktiver stirbt, so gelten die Gleichungen

$$A'^{(m)}_{aa}(x) = \frac{1}{l_a(x)} \sum v^{\frac{r+1}{m}} l_a\left(x + \frac{r}{m}\right) q_{aa}\left(x + \frac{r}{m}, x + \frac{r+1}{m}\right)$$

$$A'_{aa}(x) = \frac{v}{l_a(x)} \sum v^r l_a(x+r) q_{aa}(x+r)$$

$$\overline{A}'_{aa}(x) = -\frac{1}{l_a(x)} \int_0^\infty v^t l_a(x+t) \mu_a(x+t)\, dt.$$

Man wird also haben, wegen

$$\mu_a(x) + \nu(x) = \mu_{aa}(x):$$

$$\overline{A}'_{aa}(x) + \overline{A}'_{ai}(x) = -\int_0^\infty v^t l_a(x+t) \mu_{aa}(x+t)\, dt.$$

Das zweite Glied drückt aber den Wert $\overline{A}_{aa}(x)$ der Kapitalseinheit aus, die unmittelbar nach der Invalidisierung oder nach dem Tode des Versicherten fällig wird, falls dieser als Aktiver stirbt; $\overline{A}_{aa}(x)$ läßt sich also in die Summe zerlegen:

$$\overline{A}_{aa}(x) = \overline{A}'_{aa}(x) + \overline{A}'_{ai}(x).$$

Mit dieser Beziehung gilt aber die allgemeinere Formel

$$A^{(m)}_{aa}(x) = 1 - \frac{j(m)}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} \left(1 + a^{(m)}_{aa}(x)\right) = A'^{(m)}_{aa}(x) + A'^{(m)}_{ai}(x),$$

aus welcher sich die Möglichkeit ergibt, $A'^{(m)}_{ai}$ mittels der Aktivitätsrente $a^{(m)}_{aa}(x)$ und der reinen Aktivitätsversicherung $A'^{(m)}_{aa}(x)$ auszudrücken. Man hat insbesondere für $m = 1$

$$A'_{ai}(x) = 1 - d(a_{aa}(x) + 1) - A'_{aa}(x)$$
$$= A_{aa}(x) - A'_{aa}(x).$$

54. Auf die Annahme, daß sich die Invalidisierungen bzw. die Sterbefälle der Aktiven gleichmäßig auf das Jahr verteilen, gründen sich die Beziehungen

$$A'^{(m)}_{aa} = \frac{i}{j_{(m)}} A'_{aa}, \quad \overline{A}'_{aa} = \frac{i}{\delta} A'_{aa}$$

$$A'^{(m)}_{ai} = \frac{i}{j_{(m)}} A'_{ai}. \quad \overline{A}'_{ai} = \frac{i}{\delta} A'_{ai}$$

$$A^{(m)}_{aa} = \frac{i}{j_{(m)}} A_{aa}, \quad \overline{A}_{aa} = \frac{i}{\delta} A_{aa}$$

(vgl. S. 222, Gleichung (34)). Die analogen Ausdrücke für $A_i^{(m)}(x)$, $A_a^{(m)}(x)$, $A^{(m)}_{ai}(x)$ lassen sich unmittelbar begründen und hinschreiben.

Es bildet auch kein neues Problem, den Wert von Kapitalversicherungen zu bestimmen, deren Betrag linear variiert, oder die Ausdrücke abzuleiten, welche den Wert „vollständiger" Renten liefern, d. h. von Renten, bei welchen im Todes- oder im Invaliditätsfall eine Schlußrente gewährt wird, deren Betrag zu der von der letzten Rentenzahlung bis zum Tode bzw. zu der Invalidisierung verflossenen Zeit proportional ist. Man wird sich z. B. der Ausdrücke

$$a^{(m)} + \left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}\right) A$$

oder, für $m = 1$

$$a + \frac{i - \delta}{\delta^2} A$$

(vgl. S. 217, Formel (17)) bedienen, in welchen $a^{(m)}$ und A entsprechend zu definieren sind.[1])

1) Vgl. z. B. *Schaertlin, Zur math. Theorie der Invaliditätsversicherung,* Bern 1907, S. 17—21.

55. Wir wollen ein einziges Beispiel behandeln, das sich auf verbundene Leben bezieht.

Der Aktive (x) schließt folgende Versicherung ab:

α — einer Aktivitätsrente vom Betrage R_1, die mit dem Alter $x+n$ beginnt;

β — einer Invaliditätsrente, deren Betrag $R(u)$ vom Invalidisierungsalter abhängt. Es sei

$$R(u) = \frac{1}{2} R_1 \left\{1 + \frac{u-x}{n}\right\} \quad \text{für} \quad u < x+n$$

$$R(u) = R_1 \quad \text{für} \quad u > x+n;$$

γ — einer Überlebensrente zugunsten seiner Frau (y) *(Witwenpension)*:

γ_1 — vom Betrage $R' = \theta' \cdot R_1$, falls x das Alter $x+n$ als Aktiver erreicht hat,

γ_2 — vom Betrage $R''(z) = \frac{\theta}{2} R_1 \left\{1 + \frac{u-x}{n}\right\}$, falls x vor dem Alter $x+n$ und im Aktivitätszustande stirbt,

γ_3 — vom Betrage $R'''(z) = \frac{\theta}{2} R_1 \left\{1 + \frac{u-x}{n}\right\}$, falls x vor dem Alter $x+n$ invalid geworden ist;

δ — einer Überlebensrente zugunsten des Sohnes (z) (einer *Waisenpension*), die bis zum Alter $z+h$ auszuzahlen ist, und deren Betrag gleich dem vierten Teil der Witwenpension ist, bis zum Tode der Mutter, gleich einem Drittel derselben Pension, nach dem Tode der Mutter.

Alle Pensionen sind am Ende jedes Jahres zahlbar.

Der Vergleich mit der Aufgabe, die wir in der Nr. 50 behandelten, erlaubt uns den Wert A_1 der Invaliditätspension für (x) mit der unbedingten Pensionierung nach n Jahren unmittelbar hinzuschreiben. Er ist

$$A_1 = R_1 \left\{ \frac{1}{2} a_{ai}(x) + \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)} a_{aa}(x+n) + \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{D_a(x+r)}{D_a(x)} a_{ai}(x+r) \right\}.$$

Etwas schwieriger ist es, den Wert A_2 der definierten Witwen-Pension zu bestimmen. Erreicht (x) das Alter $x+n$ als Aktiver,

so ist $\theta' \cdot R_1$ der Betrag der jährlichen Pension zugunsten der Frau, fällig nach dem Tode von (x). Bezeichnet $a_a(x|y)$ den Wert der Rente, zahlbar nach dem Ableben des Aktiven (x), sei es als Aktiver oder Invalider, solange (y) lebt (einen Wert, den wir später näher definieren werden), so ist

$$\theta' \cdot R_1 \cdot a_a(x+n|y+n)$$

der Wert zur Zeit n und

$$v^n \cdot \theta' \cdot R_1 a_a(x+n|y+n)$$

der gegenwärtige Wert der in diesem Falle zu leistenden Witwenpension. Es ist aber $\frac{l_a(x+n) l'_{y+n}}{l_a(x) l'_y}$ die Wahrscheinlichkeit, daß x das Alter $x+n$ als Aktiver und y das Alter $y+n$ erreichen, wobei l'_y die Überlebensfunktion darstellt, die wir für die Frau postulieren, so daß man den wahrscheinlichen gegenwärtigen Wert der Rente gleich

$$A'_2 = \frac{D_a(x+n) l'_{y+n}}{D_a(x) l'_y} \theta' R_1 \cdot a_a(x+n|y+n)$$

setzen wird. Es sind fernerhin

$$\frac{l_a(x+r)}{l_a(x)} \cdot q_{aa}(x+r) \cdot \frac{l'_{y+r+1}}{l'_y}$$

bzw.

$$\frac{l_a(x+r)}{l_a(x)} \cdot \frac{l'_{y+r+1}}{l'_y} p_{ai}(x+r)$$

die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß (x) im Altersjahr $(x+r, x+r+1)$ stirbt, während (y) das Alter $y+r+1$ erreicht, bzw. daß (x) im Altersjahr $(x+r, x+r+1)$ invalid wird und daß sowohl (x) als (y) das $r+1$-te Versicherungsjahr überleben.

Im ersten Falle läuft eine Rente zugunsten der Frau, deren Betrag

$$\frac{1}{2} \theta' \cdot R_1 \left(1 + \frac{r}{m}\right)$$

ist. Es ist also, falls a'_y den Wert der lebenslänglichen Rente für (y) bezeichnet,

$$\frac{1}{2} \theta' \cdot R_1 \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right) \cdot a'_{y+r}$$

der Wert der Rente am Ende des Sterbejahres r von (x): die Summe der diskontierten wahrscheinlichen Werte, die $r = 0, 1, 2, \ldots n - 1$ entsprechen,

$$A_2'' = \frac{1}{2}\theta' \cdot R_1 \cdot \frac{v}{l_a(x)\, l'_y} \sum_{r=0}^{r=n-1} v^r \cdot l_a(x+r) \cdot q_{aa}(x+r) \cdot l'_{y+r}\, a'(y+r)$$

wird den Wert der Witwenpension ausdrücken, falls (x) im Aktivitätszustande und vor dem Alter $x + n$ stirbt.

Bezeichnet $a_i(x|y)$ den Wert der Rente, zahlbar nach dem Tode des Invaliden (x), solange (y) lebt, so wird man in analoger Weise

$$A_2''' = \frac{1}{2}\theta'' \cdot R_1 \cdot \frac{v}{l_a(x)\, l'_y} \sum_{r=0}^{r=n-1} v^r l_a(x+r)\, l'_{y+r}\, w(x+r)\, a_i(x+r|y+r)$$

als Wert der Rente betrachten, welche dem Falle entspricht, daß (x) vor dem Alter $x + n$ invalid wird.

Wir kommen endlich zu der Waisenpension, die der Waise (z) bis zum Alter $z + h$ auszuzahlen ist.[1])

Wir haben wiederum die Fälle zu unterscheiden:

1, daß (x) das Alter $x + n$ als Aktiver erreicht.

In diesem Falle ist $\frac{1}{4}\theta' \cdot R_1$ der Betrag der Waisenpension, solange (y) lebt, $\frac{1}{3}\theta' \cdot R_1$ der Betrag derselben Pension nach dem Tode der Mutter (y). Es ist also notwendig, die Möglichkeiten getrennt zu behandeln:

1_1, daß die Mutter (y) vor dem Alter $y + n$ stirbt,

1_2, daß sie das Alter $y + n$ erreicht.

Es ist, falls l_z'' die Überlebensfunktion bezeichnet, die wir für z postulieren,

$$\frac{l_a(x+n)}{l_a(x)} \frac{l''_{z+n}}{l''_z} \left(1 - \frac{l'_{y+n}}{l'_y}\right)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß 1 und 1_1 eintreten, und daß (z) das Alter $z + n$ erreicht; in diesem Falle ist offenbar

$${}_1A_3 = \frac{1}{3}\theta' \cdot R_1 \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)} \frac{l''_{z+n}}{l''_z} \left(1 - \frac{l'_{y+n}}{l'_y}\right) \cdot |_{h-n}a_a(x+n|z+n)$$

1) Wir nehmen hier an, daß $h > n$ ist. Im Falle, wo $h \leqq n$, wird man alle Leistungen vernachlässigen, für welche $r > h$.

der Wert der Waisenpension, wobei $a(x + n|z + n)$ die temporäre Überlebensrente zugunsten von (z) ausdrückt.

Trifft dagegen 1 und 1_2 zu, so besteht die Waisenpension aus einer Rente vom Betrage $\frac{1}{4}\theta' \cdot R_1$, zahlbar nach dem Tode von (x) und solange (y) und (z) leben (höchstens aber bis zum Alter $z + h$ von (z)), und aus einer Rente vom Betrage $\frac{1}{3}\theta' \cdot R_1$, zahlbar nach dem Tode von (x) und von (y), und zwar solange, bis (z) stirbt oder das Alter $z + h$ erreicht.

Es bezeichne

$a_a(x|\overline{y, z})$ die Rente, die mit dem Tode des Aktiven (x) fällig und solange ausgezahlt wird, als (y) und (z) leben;

$a_a(\overline{x, y}|z)$ die Rente, die erst nach dem Tode von (x) und von (y) fällig und solange ausgezahlt wird, als (z) lebt;

dann wird

$${}_2A_3'' = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)} \frac{l'_{y+n}}{l'_y} \cdot \frac{l''_{z+n}}{l''_z} \theta' \cdot R_1 \left\{ |_{h-n}a_a(x+n|\overline{y+n, z+n}) \cdot \frac{1}{4} + |_{h-n}a_a(\overline{x+n, y+n}|z+n)\, \frac{1}{3} \right\}$$

der Wert der Waisenpension sein, falls 1 und 1_2 eintreten.

2. (x) stirbt als Aktiver und vor dem Alter $x + n$, und

2_1 nach dem Tode der Frau (y),

2_2 vor dem Tode der Frau (y).

Es ist

$$\frac{l_a(x+r)}{l_a(x)} \frac{l''_{z+r+1}}{l''_z} q_{aa}(x+r) \left(1 - \frac{l'_{y+r}}{l'_y}\right)$$

die Wahrscheinlichkeit von 2_1, und daß (z) am Ende des Sterbejahres des Vaters noch lebt, und

$$\frac{1}{6} \cdot \theta' \cdot R_1 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

der entsprechende Betrag der Waisenpension, deren Wert durch

$${}_2A_3' = \frac{v}{6} \cdot \theta' \cdot R_1 \cdot \frac{1}{D_a(x)\, l'_y \cdot l''_z} \sum_{r=1}^{r=n-1} D_a(x+r) \cdot l'_{z+r+1} \cdot (l_y' - l'_{y+r}) \cdot q_{aa}(x+r) \cdot |_{h-n}a_a(x+r|z+r) \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

gegeben ist.

Stirbt dagegen (x), während (y) und (z) noch leben, so werden wir hier wiederum die Renten $a(y|z)$, a_{yz} einführen müssen, und den Wert der Waisenpension gleich

$$
{}_2A_3'' = \frac{\theta'}{2} \cdot R_1 \cdot \frac{v}{D_a(x) \cdot l_y' \cdot l_z''} \sum_{r=0}^{r=n-1} v^r D_a(x+r)\, l'_{y+r+1} l''_{z+r+1} q_{aa}(x+r)
$$

$$
\left\{\frac{1}{4}\,|_{h-n}a_{yz} + \frac{1}{3}\,|_{h-n}a(y|z)\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)
$$

setzen.

3. (x) wird invalid vor dem Alter $x+n$ und

3_1 nach dem Tode seiner Frau,

3_2 vor dem Tode seiner Frau.

Den Werten $A_2'' A_2'''$ des Falles 2 werden hier bzw. die neuen Werte entsprechen:

$$
{}_3A_3' = \frac{v}{6}\,\theta'' R_1 \frac{1}{D_a(x) l_y' l_z''} \sum_{r=0}^{r=n-1} v^r l_a(x+r)\,(l_y' - l'_{y+r+1})\, l''_{z+1}\left(1+\frac{r}{n}\right)
$$

$$
\cdot\, w(x+z)\,(1 + |_{h-n}a_i(x+r+1|z+r+1)
$$

$$
{}_3A_3'' = \frac{v\cdot\theta''\cdot R_1}{2\cdot D_a(x)\cdot l_y' l_z''} \sum_{r=0}^{r=n-1} v^r l_a(x+r)\, w(x+r)\, l'_{y+r+1} l''_{z+r+1}\left(1+\frac{r}{n}\right)
$$

$$
\cdot\left\{\frac{1}{3}\,|_{h-n}a_i(\overline{x+r:y+r}|z+r) + \frac{1}{4}\,a_i(x+r|\overline{y+r:z+r})\right\}.
$$

Der Gesamtwert der betrachteten Versicherung ist also

$$
A = A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + (A_2' + A_2'' + A_2''')
$$

$$
+ ({}_1A_3' + {}_1A_3'' + {}_2A_3' + {}_2A_3'' + {}_3A_3' + {}_3A_3'')
$$

$$
= R_1\Big[\frac{1}{2}\,a_{ai}(x) + \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\,a_{aa}(x+n)
$$

$$
+ \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n} \frac{D_a(x+r)}{D_a(x)}\,a_{ai}(x+r)
$$

$$
+ \theta'\left\{\frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\,\frac{l'_{y+n}}{l_y'}\,a_a(x+n|y+n)\right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{2}\,\frac{v}{D_a(x) l_y'} \sum_{r=0}^{r=n-1} v^r l_a(x+r)\, q_{aa}(x+r)\, l'_{y+r} a'(y+r)\left(1+\frac{r}{n}\right)\right\}
$$

$$
+ \frac{1}{2}\,\theta''\cdot\frac{v}{D_a(x) l_y'} \sum_{r=0}^{r=n-1} v^r l_a(x+r)\, l'_{y+r} w(x+r)\, a_i(x+r|y+r)\left(1+\frac{r}{n}\right)
$$

$$
+ \theta'\left\{\frac{1}{3}\,\frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\,\frac{l''_{z+n}}{l_z''}\left(1-\frac{l'_{y+n}}{l_y'}\right)\cdot |_{h-n}a_a(x+n|z+n)\right.
$$

$$
+ \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\,\frac{l'_{y+n}}{l_y'}\,\frac{l''_{z+n}}{l_z''}\Big[\frac{1}{4}\,|_{h-n}a_a(x+n|\overline{y+n,\,z+n})
$$

$$
+ \frac{1}{3}\,|_{h-n}a_a(\overline{x+n:y+n}|z+n)
$$

$$
+ \frac{v}{6}\,\frac{1}{D_a(x) l_y' \cdot l_z''} \sum_{r=1}^{r=n-1} v^r \cdot l_a(x+r)\,(l_y' - l'_{y+r})\, q_{aa}(x+
$$

$$
+ r)\left(1+\frac{r}{n}\right)|_{h-n}a_a(z+r)
$$

$$
+ \frac{1}{2}\,\frac{v}{D_a(x) l_y' l_z''} \sum_{r=1}^{r=n-1} v^r D_a(x+r)\, l'_{y+r} l''_{z+r} q_{aa}(x+r)\left(1+\right.
$$

$$
\left.+\frac{r}{n}\right)\left\{\frac{1}{4}\,|_{h-n}a_{yz} + \frac{1}{3}\,|_{h-n}a(y|z)\right\}
$$

$$
+ \theta''\left\{\frac{v}{6}\,\frac{1}{D_a(x) l_y' l_z''} \sum_{r=1}^{r=n-1} v^r l_a(x+r)\,(l_y'\right.
$$

$$
- l'_{y+r})\, l''_{z+r}\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right) w(x+r)\cdot |_{h-n}a_i(x+r+1|z+r)
$$

$$
+ \frac{v}{2}\,\frac{1}{D_a(x)\cdot l_y' \cdot l_z''} \sum_{r=1}^{r=n-1} v^r l_a(x+r)\, w(x+r)\, l'_{y+r} l''_{z+r}\left(1+\frac{r}{n}\right)
$$

$$
\frac{1}{3}\,a_i(\overline{x+r:y+r}|z+r) + \frac{1}{4}\,|_{h-n}a_i(x+r|\overline{y+r:z+r})\Big].
$$

56. Es handelt sich nun darum, die Werte der eingeführten Überlebensrenten zu definieren.

Es bezeichne

a_{xy} den Wert der Rente, zahlbar bis zum ersten Ableben des Paares $\{x, y\}$,

$a_a(x, y)$ den Wert derselben Rente für den Aktiven (x) und für (y);

$a_i(x, y)$ den Wert derselben Rente für den Invaliden (x) und für (y);

$a_{aa}(x, y)$ den Wert der Rente für den Aktiven (x) und für (y), zahlbar, solange (x) als Aktiver lebt und (y) ebenfalls lebt;

$a_{ai}(x, y)$ den Wert der Rente für den Aktiven (x) und für (y), beginnend mit der Invalidisierung von (x) und aufhörend mit dem ersten Todesfall.

Es ist

$$a_{xy} = v\,\frac{l_{x+1}}{l_x}\,\frac{l'_{y+1}}{l'_y} + v^2\,\frac{l_{x+2}}{l_x}\,\frac{l'_{y+2}}{l'_y} + \cdots$$

$$a_{aa}(x, y) = v\,\frac{l_a(x+1)}{l_a(x)}\,\frac{l'_{y+1}}{l'_y} + v^2\,\frac{l_a(x+2)}{l_a(x)}\,\frac{l'_{y+2}}{l'_y} + \cdots$$

$$a_i(x, y) = v\,\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}\,\frac{l'_{y+1}}{l'_y} + v^2\,\frac{\psi(x+2)}{\psi(x)}\,\frac{l'_{y+2}}{l'_y} + \cdots$$

$$l_x \cdot a_{xy} = l_a(x)\,a_a(x, y) + l_i(x) \cdot a_i(x, y)$$

$$a_a(x, y) = a_{aa}(x, y) + a_{ai}(x, y).$$

Die fünf Beziehungen bestimmen die genannten Verbindungsrenten. Ist aber

$a_a(x|y)$ der Wert der Rente, zahlbar nach dem Ableben des Aktiven (x), sei es als Aktiver oder Invalider, solange (y) lebt;

$a_i(x|y)$ der Wert der Rente, zahlbar nach dem Ableben des Invaliden (x), solange y lebt;

so ist

$$a_a(x|y) = a_y' - a_a(x, y)$$

$$a_i(x|y) = a_y' - a_i(x, y).$$

Neben $a_a(x|y)$, $a_i(x|y)$ haben wir die Überlebensrenten

$$a_a(\overline{x:y}|z),\quad a_i(\overline{x:y}|z),\quad a_a(x|\overline{y:z}),\quad a_i(x|\overline{y:z})$$

eingeführt. Es ist

$a_a(\overline{x:y}|z)$ die Rente, zahlbar, nachdem sowohl der Aktive (x) als (y) gestorben sind, solange (z) lebt;

$a_i(\overline{x:y}|z)$ die entsprechende Rente, falls (x) invalid ist;

$a_a(x|\overline{y:z})$ die Rente, zahlbar nach dem Tode des Aktiven (x), solange sowohl (y) als (z) leben;

$a_i(x|\overline{y:z})$ die entsprechende Rente, falls (x) invalid ist,

und es wird (vgl. S. 237)

$$a_a(\overline{x:y}|z) = a_z - a_{zy} - a_a(x, z) + a_a(x, y, z)$$

$$a_i(\overline{x:y}|z) = a_z - a_{zy} - a_i(x, z) + a_i(x, y, z)$$

$$a_a(x|\overline{y:z}) = a_{yz} - a_a(x, y, z)$$

$$a_i(x|\overline{y:z}) = a_{yz} - a_i(x, y, z),$$

wobei sich die Indizes a und i immer nur auf (x) beziehen. $a_a(x, y, z)$, $a_i(x, y, z)$ brauchen wir nicht mehr explizite zu definieren.

Dritter Abschnitt.

Die Technik der Lebensversicherung.

Kapitel I.

Die Prämien und die Reserven.

§ 1. Der Prämienbegriff. Netto- und Bruttoprämie.

1. Wir nennen *Bruttoprämien* die Beiträge, welche die Versicherten einzahlen, *Nettoprämien* denjenigen Teil der Prämie, welcher dazu und nur dazu bestimmt ist, die Fonds *(Nettofonds)* zu bilden, die rechnungsmäßig nötig sind, um den Versicherer in den Stand zu setzen, die vertragsmäßig beim Eintreten des versicherten Ereignisses auszuzahlenden Summen wirklich zu leisten, unter der Annahme, daß die vorausgesetzten Rechnungsgrundlagen im Durchschnitt der Wirklichkeit entsprechen. Daraus folgt, daß die Frage der Bestimmung der Nettoprämien mit derjenigen der Bestimmung des Wertes einer Versicherung, wie wir ihn eingeführt und definiert haben, erledigt ist; es handelt sich in jedem einzelnen Falle nur darum, eine Summe (oder ein System von Summen) anzugeben, deren wahrscheinlicher Wert dem wahrscheinlichen Werte der Leistungen des Versicheres zugunsten des einzelnen Versicherten gleichkommt.

2. *Zuschlag* nennen wir die Differenz zwischen der Brutto- und der Nettoprämie, *Bruttofonds* die durch die *Bruttoprämien* gebildeten Fonds. Die Einführung positiver Zuschläge geschieht, um die kaufmännischen Unkosten des Versicherungsbetriebs, sowie etwaige von der Sterblichkeit und den Kapitalanlagen abhängige Verluste zu decken, und falls der Versicherer ein privatwirtschaftliches Unternehmen ist, um Gewinne zu bringen.

Die Unkosten unterscheidet man in *erste* oder *Erwerbsunkosten* und in *dauernde Unkosten*; dementsprechend unterscheidet man bei dem in der Bruttoprämie P' steckenden Zuschlag $\alpha P'$ einen ersten Zuschlag $\alpha_1 P'$ und einen zweiten $\alpha_2 P'$; die Nettoprämie ist durch

$$P = \{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)\} P'$$

ausgedrückt.

$\alpha_1 P'$ soll diejenigen ersten Unkosten aufbringen, die nicht durch besondere Polizegebühren gedeckt werden. Es handelt sich um das Honorar für die ärztliche Untersuchung bei Todesfallversicherungen, Stempelabgaben, Post- und Reisespesen, besonders aber um die Provision, die dem Agenten für das Abschließen der Versicherung gezahlt wird. Diese *Abschlußprovision* ist in manchen Ländern recht hoch, und beträgt gewöhnlich 2, bisweilen $2\frac{1}{2}$ und 3 % der Versicherungssumme. Sie wird beim Abschluß der Versicherung gezahlt, auch wenn die Versicherungsprämien periodisch (z. B. jährlich) geleistet werden. Auf die jährliche Prämie bezogen, beträgt sie 50 bis 60, höchstens 80 %. Außer der Abschlußprovision wird den Agenten eine weitere Provision für das Einkassieren der Prämien gezahlt (die *Inkassoprovision*). Diese Provision gehört nicht zu den ersten, sondern zu den dauernden Unkosten uud beträgt gewöhnlich 2 bis 3 % der einkassierten Prämie. Bei manchen Gesellschaften werden besonders hohe Inkassoprovisionen vergütet, und die Abschlußprovision entsprechend niedriger gehalten. Dieses System bietet den großen Vorteil, daß es dabei im Interesse der Agenten liegt, nicht nur möglichst viele, sondern möglichst langdauernde und folglich ein sicheres Einkommen bringende Versicherungen zu verschaffen. Demselben Zwecke würde auch die Verteilung der Abschlußprovission auf einige Jahre dienen.

Außer den Inkassoprovisionen gehören zu den dauernden Unkosten die Verwaltungskosten; man nimmt sie der Versicherungssumme und der Versicherungsdauer proportional an.

Sind die Rechnungsgrundlagen für die Nettoprämien und die Bruttoprämien bekannt, so läßt sich natürlich

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

angeben.

3. Indessen ist die Berechnung der Bruttoprämien nicht nur von technischen Betrachtungen, sondern auch und zwar ganz be-

sonders von Konkurrenzrücksichten abhängig; diese führen manchmal, besonders bei Aussteuerversicherungen, dazu, Tarife zu bilden, deren Sätze sehr wenig von den Nettoprämien abweichen.

Wir fragen, innerhalb welcher Grenzen (außer denjenigen, die aus der Konkurrenz zwischen Versicherern entstehen) der Zuschlag enthalten sein muß. Daß die untere Grenze nur ausnahmsweise Null sein kann, versteht sich von selbst. Um eine obere Grenze anzugeben, führt Herr *Bohlmann* den Begriff der *„Maximalprämie“* ein. Um diese zu bestimmen, unterscheidet er alle bei einer Versicherung denkbaren Fälle, und berechnet den Wert, den in jedem von ihnen die nach den Versicherungsbedingungen zahlbare Nettoprämie haben würde, wenn der betreffende Fall immer einträte. Im Falle einer Leibrente auf (x) ist z. B. die Maximalprämie

$$1 + v + \cdots + v^{\omega - x} = \frac{1 - v^{\omega - x + 1}}{1 - v} \quad (\omega = \text{das höchste Alter})$$

im Falle einer Todesfallversicherung ist die Maximalprämie die Summe 1.

Mit der Leistung der Maximalprämie hört die Versicherungsoperation auf, einen Vorteil gegenüber der Sparoperation zu bieten.

4. Herr *Mounier*[1]) bringt die Frage der Bestimmung der Zuschläge in Verbindung mit der *Bernoulli*schen Wertlehre[2]), und bestimmt den moralischen Wert, den eine Versicherung für den Versicherten hat. Der Forderung, daß dieser Wert nicht negativ sein kann, entspricht eine obere Grenze für den Zuschlag. In erster Annäherung ist eine solche Grenze dem mittleren Risiko[3]) der Versicherung direkt und dem Vermögen des Versicherten umgekehrt proportional.

Das erste Kriterium hängt mit der vorhin eingeführten Maximalprämie zusammen. Was das zweite Kriterium anlangt, so folgt aus ihm nicht, daß es moralisch ist, jemandem umso mehr Geld abzunehmen, je weniger er hat, sondern daß umgekehrt der allgemein adoptierte Grundsatz, die Höhe der Prämie nicht vom Vermögen des Versicherten abhängig zu machen, sich auch vom

1) Archief vor de Verzekeringswetenschap, I, 1894.
2) Vgl. S. 24.
3) Vgl. Abschnitt IV, § 5.

Standpunkte der Bernoullischen Wertlehre als sehr vernünftig erweist, weil danach die Versicherung für den Versicherten im allgemeinen einen um so höheren Wert besitzt, je weniger er bemittelt ist (*Bohlmann*, l. c. S. 891).

§ 2. **Einmalige und periodische Prämien. Orchards Tafeln.**

5. Es sei A der (wahrscheinliche) Wert einer Versicherung auf (x) bzw. auf $(x, y, z, \ldots)$ und

$$A' = (1 + \alpha) A$$

die Summe, welche (x) bzw. $(x, y, z, \ldots)$ beim Abschluß der Versicherung zu zahlen hätten, um von jeder späteren Zahlung befreit zu werden. Es ist A' *die einmalige Bruttoprämie.* $\alpha = 0$ entspricht die *einmalige Nettoprämie.*

Wir können andererseits annehmen, daß (x) bzw. $(x, y, z, \ldots)$ sich zu der Zahlung einer Reihe von Leistungen verpflichten, deren Betrag und deren Zahlungstermine bestimmt sind *(periodische Prämien).* Der wahrscheinliche Wert der Nettoprämien wird der Größe A gleichkommen; es wird dagegen der wahrscheinliche Wert der Bruttoprämien größer sein, als A', da die Verwaltungskosten des Versicherers offenbar bei der periodischen Prämienzahlung größer sind, als bei der einmaligen.

In der Praxis werden die periodischen Prämien am Anfang jedes Versicherungsjahres *(jährliche Prämien)* oder am Anfang jedes Versicherungs-m-tel-jahres geleistet, bis (x) ein gewisses Alter erreicht hat oder solange gewisse Individuen der Gruppe $(x, y, z \ldots)$ am Leben sind oder bis sie ein gewisses Alter erreicht haben, oder höchstens solange die Versicherung besteht.

Es seien P_m und P'_m die Netto- bzw. die Bruttoprämie, die am Anfang des $m + 1$-ten Versicherungsjahres zu leisten sind, falls ein Ereignis eintritt, dessen Wahrscheinlichkeit p_m ist. Wir haben gesehen, daß, falls n die Dauer der Versicherung bezeichnet

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} P_m v^n p_m = A .$$

Setzt man

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} v^m p_m = \mathrm{a}$$

und

$$P_m = P_{m+1} = P_{m+2} = \cdots = P,$$

so folgt

$$P = \frac{A}{\mathbf{a}} \qquad (1)$$

als Betrag der jährlichen konstant bleibenden Nettoprämie, welche der Versicherung A und dem durch $\mathbf{a}$ definierten Zahlungsmodus entspricht.

Eine Relation der Form (1) besteht auch im Falle linear variierender Prämien. Nimmt man an, daß

$$P_0 = P$$

$$P_m = P(1 \pm m\beta),$$

so hat man

$$P = \frac{A}{\sum_{m=0}^{m=n-1} v^m p_m \pm \beta \sum_{m=0}^{m=n-1} m v^m p_m} = \frac{A}{\mathbf{a}},$$

falls wiederum

$$\mathbf{a} = \sum_{m=0}^{m=n-1} v^m p_n + \beta \sum_{m=1}^{m=n-1} m v^m p_m$$

gesetzt wird.

6. Es sei A der Wert der lebenslänglichen Todesfallversicherung auf (x), $\mathbf{a}$ die pränumerando zahlbare lebenslängliche Rente. Es ist dann offenbar

$$P = P_x = \frac{A_x}{\mathbf{a}_x} = \frac{M_x}{D_x} : \frac{N_{x-1}}{D_x} = \frac{M_x}{N_{x-1}} = \frac{1 - d\mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x} = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d$$

also auch

$$\mathbf{a}_x = \frac{1}{P_x + d}$$

$$\mathbf{a}_{x+1} = \frac{1}{P_{x+1} + d}$$

und wegen

$$\mathbf{a}_x = 1 + v p_x \mathbf{a}_{x+1}$$

$$\frac{1}{P_x + d} = 1 + \frac{v p_x}{P_{x+1} + d}.$$

Mittels dieser Formel ist es möglich, P_x aus P_{x+1} und der Überlebenswahrscheinlichkeit p_x zu berechnen.

7. Aus

$$A_x = 1 - d\mathbf{a}_x$$

$$P_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d$$

folgt, daß man von einer Tafel der Werte $\mathbf{a}_x = 1 + a_x$ zu Tafeln der Werte A_x und P_x durch eine rein arithmetische Operation und unabhängig von der Sterblichkeitstafel übergehen kann. Tafeln für die Werte A_x und P_x in Funktion äquidistanter Werte von a_x (zwischen denen man linear interpolieren wird), hat zuerst *W. Orchard*[1]) hergestellt.

Ist z. B. $a = 18$, so ist für $i = 0{,}035$ $(d = 0{,}0338164)$

$$A = 1 - 19 \cdot 0{,}0338164 = 0{,}3574884 = 0{,}35749$$

$$P = \frac{1}{19} - 0{,}03382 = 0.01882$$

und für $a = 19$

$$A = 0.32367$$

$$P = 0.01618.$$

Es ist für die Tafel H^M und $i = 0{,}035$

$$\text{für} \quad x = 28, \; a_{28} = 18.835.$$

Setzen wir

$$\Delta a = 0.835, \; a + \Delta a = 18.835,$$

so ist der entsprechende Wert $A + \Delta A$ von A

$$A + \Delta A = 1 - d(\mathbf{a} + \Delta \mathrm{a})$$

$$\Delta A = -d \cdot 835.$$

Wir finden demnach

$$A_{28} = 0.35749 - 0.2824 = 0.32925.$$

Der direkt berechnete Wert von A_x für $x = 28$ ist indessen 0.32924. Um P_{28} zu berechnen, bemerkt man, daß

$$\text{für} \quad \Delta \mathbf{a} = 1, \quad \Delta P = -0{,}00264$$

ist. Es wird also, für $\Delta a = 0{,}835$

$$\Delta P = -0{,}835 \times 0{,}00264 = 0{,}002204$$

$$P_{28} = 0{,}016616.$$

---

1) *Single and anual Premium*, 1850. Vgl. Text-book usw. S. 147 u. ff.

Der direkt berechnete Wert von P_x für $x = 28$ ist indessen 0,01660. Aus

$$P + \Delta P = \frac{1}{\mathbf{a} + \Delta a} - d$$

folgt übrigens in erster Annäherung

$$P + \Delta P = \frac{1}{\mathbf{a}}\left(1 - \frac{\Delta a}{\mathbf{a}}\right) - d$$

$$\Delta P = -\frac{\Delta a}{\mathbf{a}^2}.$$

Wir finden in unserem Falle

$$\Delta P = -0{,}00231$$

und

$$P_{28} = 0{,}01651\,.$$

Der Fehler ist keineswegs unerheblich; die tabellarische Interpolation führt korrekter zum Ziele.

§ 2. Die Prämienrückgewähr.

8. Es kommt in der Praxis vor, daß eine komplementäre Versicherung mit der abgeschlossenen verbunden wird, die in der Rückgewähr der eingezahlten Prämien für den Fall besteht, daß der eigentliche Versicherungszweck nicht erreicht werden sollte. Es handelt sich um eine zweite Versicherung, deren Wert nach denselben Grundsätzen berechnet wird und bezahlt werden muß, wie derjenige der Hauptversicherung. Die Rückgewähr bezieht sich in der Praxis ausschließlich auf die Bruttoprämien (die einzigen, welche die Versicherten normalerweise kennen), und zwar entweder auf die Totalität oder auf einen Bruchteil derselben, wobei entweder keine, oder eine mäßige Verzinsung stattfindet. Wir wollen die Nettoprämie für die Rückgewähr bestimmen.

Ist P die einheitliche Hauptversicherungsprämie, P_1 die Nettoprämie für die Prämienrückgewähr (d. h. für die Versicherung des Kapitals 1 bei einmaliger Prämienzahlung für eine um 1 von 1 zu n steigende Kapitalversicherung bei jährlicher und n Jahre dauernder Prämienzahlung), α der Zuschlag für jede Prämieneinheit, so ist die gesamte Nettoprämie π bei Bruttoprämienrückgewähr durch die lineare Gleichung definiert

$$\pi = P + P_1\pi(1 + \alpha) \qquad (2)$$

und bei der Rückerstattung von Nettoprämien, durch

$$\pi = P + \pi P_1$$

$(1 + \alpha)\pi P_1$ ist die gesuchte Rückgewährprämie.

9. Wir wollen annehmen, daß keine Verzinsung der eingezahlten Prämien stattfindet, und daß es sich um die Aussteuerversicherung handelt.

Es bezeichne $\{x, y\}$ eine Gruppe von 2 Personen. Die Summe 1 ist vom Versicherer am Ende des n^{ten} Versicherungsjahres und nur in dem Falle zu zahlen, wo (x) das Alter $x + n$ erreicht. Die jährlichen Prämien werden am Anfang jedes Versicherungsjahres geleistet, solange die Gruppe (x, y) besteht, d. h. solange sowohl (x) wie (y) am Leben sind, aber höchstens $(n - 1)$ Jahre lang.

Es ist, im Sinne des vorigen Paragraphen

$$A = {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\mathbf{a} = |_n\mathbf{a}_{xy} = \frac{N_{x-1:y-1} - N_{x+n-1:y+n-1}}{D_{xy}}$$

also auch

$$P = |_nP_{xy} = \frac{A}{\mathbf{a}} = \frac{l_y D_{x+n}}{N_{x-1:y-1} - N_{x+u-1:y+n-1}}.$$

Um P_1 zu bestimmen, bemerken wir, daß, falls (x) im r^{ten} Versicherungsjahre (d. h. im Altersintervall $(x + r - 1, x + r)$) stirbt, 1, 2, ... r Prämien zurückzuerstatten sind, je nachdem (y) im ersten, zweiten ..., $r - 1$-ten Versicherungsjahre verstorben ist, oder am Ende der Zeit t noch lebt. Es sind bzw.

$$1,\ {}_1p_y,\ \ldots,\ {}_{r-1}p_y$$

die Wahrscheinlichkeiten, daß (y) die Alter y, bzw. $y + 1, \ldots, y + r - 1$ erreicht, es ist also

$${}_{r-1}|q_x(1 + {}_1p_y + \cdots + {}_{r-1}p_y)$$

der wahrscheinliche Wert der Leistung des Versicherers zur Zeit r, falls die jährliche Prämie gleich 1 angenommen wird.

Führen wir den Diskontierungsfaktor v^r ein, und summieren wir nach r, so erhalten wir die einmalige Nettoprämie für die Rückgewähr

$$\sum_{r=1}^{r=n}[v^r {}_{r-1}|q_x(1 + {}_1p_y + \cdots + {}_{r-1}p_y)]$$

und indem wir durch $|_n\mathbf{a}_{xy}$ dividieren, die jährliche Nettoprämie

$$\frac{1}{|_n\mathbf{a}_{xy}}\sum_{r=1}^{r=n}[v^r{}_{r-1}|q_x(1+{}_1p_y+\cdots{}_{r-1}p_y)].$$

Man hat also aus (2)

$$\pi=\frac{\dfrac{l_y D_{x+n}}{N_{x-1:y-1}-N_{x+n-1:y+n-1}}}{1-(1+\alpha)\dfrac{D_{xy}}{N_{x-1:y-1}-N_{x+n-1:y+n-1}}\sum\limits_{r=1}^{r=n}[v^r_{r-1}|q_x(1+{}_1p_y+\cdots+{}_{r-1}p_y)]}$$

$$=\frac{D_{x+y}}{N_{x-1:y-1}-N_{x+n-1:y+n-1}-(1+\alpha)\sum\limits_{r=1}^{r=n}[C_{x+r-1}(1+{}_1p_y+\cdots+{}_{r-1}p_y)]}.$$

Setzt man in erster Annäherung

$$1={}_1p_y=\cdots={}_{r-1}p_y,$$

so wird die Summe des Nenners zu

$$R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}$$

und man findet für den gesuchten Wert von π

$$\pi'=\frac{D_{x+n}}{N_{x-1:y-1}-N_{x+n-1:y+n-1}-(1+\alpha)\{R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}\}}.$$

Die immer positive Differenz $\pi'-\pi$ ist desto größer, je größer y und n sind. Der Ausdruck π' entspricht der Annahme, daß (y) nur nach (x) sterben kann; einer Annahme, die besonders für höhere Werte von y nur zu ziemlich rohen Annäherungen führt.

Nimmt man, statt

$$\mathbf{a}=|_n\mathbf{a}_{xy}$$

$$\mathbf{a}=|_n\mathbf{a}_x$$

an, so findet man

$$\pi=\frac{D_{x+n}}{N_{x-1:y-1}-N_{x+n-1}-(1+\alpha)\{R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}\}}$$

gemäß der Annahme, daß die Prämienzahlung nur vom Überleben von (x) abhängig ist. Es ist in diesem Falle

$$P=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{1}{|_n\mathbf{a}_x}=\frac{D_{x+n}}{N_{x-1}-N_{x+n-1}}$$

die jährliche Nettoprämie der Versicherung ohne Rückgewähr.

Dem Werte 0 von α entspricht die Annahme, daß nicht die Brutto-, sondern die Nettoprämien zurückerstattet werden.

10. Die Annahme, daß sich die Rückgewähr auf die Prämien und auf die Zinsen der Prämien bezieht, bedingt keinen wesentlichen Unterschied. Es wird gewöhnlich einfach verzinst; die zusammengesetzte Verzinsung auf Grund des der Berechnung der Prämien zugrunde gelegten Zinsfußes würde die Versicherungsoperation zur reinen Sparoperation machen. Während bei der Rückgewähr von Nettoprämien als eigentliche Versicherungsprämie (d. h. als Summe, die aufs Spiel gesetzt wird) nur die Zinsen der vom Versicherten wirklich eingezahlten Summe dienen, dient als Prämie bei der Rückgewähr von Prämien und Zinsen nur der Unterschied zwischen den eingebrachten und den zurückzuerstattenden Zinsen. Die Rückgewähr hat also die auffallende und dem Wesen der Versicherung widersprechende Wirkung, daß die Versicherungsoperation mehr oder weniger auf eine Sparoperation reduziert wird, wodurch natürlich die eigentlichen wirtschaftlichen Vorteile der Versicherung gegenüber dem reinen Sparen verloren gehen.

In bezug auf die Rückgewähr der Prämien und ihrer einfachen Zinsen wollen wir das folgende Beispiel betrachten.

Es sei (xy) die betrachtete Gruppe. Wir fragen nach dem Werte der einfachen Überlebensversicherung auf das Leben (x) zugunsten des (y) gegen jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr der eingezahlten Prämien nebst deren einfachen Zinsen zum Zinsfuße i, wenn (y) vor (x) sterben sollte.

Die Rückgewähr bedeutet hier eine Überlebensversicherung auf den Tod von (y) zugunsten des (x), deren Beträge im ersten, zweiten, dritten ... Versicherungsjahre bzw. durch

$$(1+i)(1+\alpha)\pi=(1+\alpha)\pi+i(1+\alpha)\pi;$$

$$(1+2i)(1+\alpha)\pi+(1+i)(1+\alpha)\pi=2(1+\alpha)\pi+3i(1+\alpha)\pi,$$

$$(1+3i)(1+\alpha)\pi+(1+2i)(1+\alpha)\pi+(1+i)(1+\alpha)\pi=3(1+\alpha)\pi+6i(1+\alpha)\pi$$

. . . .

ausgedrückt werden. Es ist

$$(1+\alpha)\pi(IA)_{xy}^{1}$$

der Wert der Rückgewähr der Prämien,

$$(1+\alpha)\pi i\,\frac{1}{D_{xy}}\left\{C_{x\overset{1}{y}} + 3\,C_{\overline{x+1}:\overset{1}{\overline{y+1}}} + 6\,C_{\overline{x+2}:\overset{1}{\overline{y+2}}} + 10\,C_{\overline{x+3}:\overset{1}{\overline{y+3}}}\right.$$

$$\left.+\cdots\right\} = (1+\alpha)i\pi\left\{A_{x\overset{1}{y}} + 2\,{}_{1|}A_{x\overset{1}{y}} + 3\,{}_{2|}A_{x\overset{1}{y}} + \cdots\right\}$$

$$= (1+\alpha)i\pi\left[(IA)_{x\overset{1}{y}} + {}_{1|}(IA)_{x\overset{1}{y}} + {}_{2|}(IA)_{x\overset{1}{y}} + \cdots\right]$$

der Wert der Rückgewähr der Zinsen. Demnach ist

$$\pi\,\mathbf{a}_{xy} = A_{xy}^{1} + (1+\alpha)\pi\left\{(IA)_{x\overset{1}{y}} + i\left[(IA)_{x\overset{1}{y}} + {}_{1|}(IA)_{x\overset{1}{y}} + \cdots\right]\right\}$$

und

$$\pi = \frac{A_{xy}^{1}}{\mathbf{a}_{xy} - (1+\alpha)\left[(IA)_{x\overset{1}{y}} + i\left\{(IA)_{x\overset{1}{y}} + {}_{1|}(IA)_{x\overset{1}{y}} + {}_{2|}(IA)_{x\overset{1}{y}} + \cdots\right\}\right]}.$$

11. Es kommt öfters vor, daß man die Zuschläge zu den Prämien derart bestimmt, daß, falls π die Nettoprämie bedeutet, die Bruttoprämie durch

$$\alpha\pi + \beta$$

ausgedrückt wird. Die Grundgleichung (2) wird dann zu

$$\pi = P + P_1(\alpha\pi + \beta)$$

woraus sich

$$\pi = \frac{P + \beta P_1}{1 - \alpha P_1}$$

bestimmen läßt.

Wir hätten z. B. für die zuletzt ausgerechnete Prämie

$$\pi = \frac{A_{xy}^{1} + \beta\left[(IA)_{x\overset{1}{y}} + i\left\{(IA)_{x\overset{1}{y}} + {}_{1|}(IA)_{x\overset{1}{y}} + \cdots\right\}\right]}{\mathbf{a}_{xy} - \alpha\left[(IA)_{x\overset{1}{y}} + i\left\{(IA)_{x\overset{1}{y}} + {}_{1|}(IA)_{x\overset{1}{y}} + \cdots\right\}\right]}.$$

§ 3. Die Definition der Reserve. Negative Reserven.

12. Zur Zeit, wo die Versicherung abgeschlossen wird, ist, falls

$$P = \frac{A}{\mathbf{a}}$$

(vgl. (1))

$$A - P\mathbf{a} = 0.$$

Sind dagegen m Jahre seit dem Versicherungsanfang verflossen, und bezeichnen A_m bzw. $P\mathbf{a}_m$ die wahrscheinlichen Werte der Leistungen des Versicherers bzw. des Versicherten (oder der versicherten Gruppe) die nach der Zeit m stattfinden werden, so ist

$$A_m - P\cdot\mathbf{a}_m = V_m \qquad (3)$$

der Betrag der *Nettoreserve* V_m zur Zeit m,

Es sei $P\cdot\mathbf{a}_m = 0$. Gleichung (3) wird dann zu

$$A_m = V_m.$$

In dem Falle also, wo nach der Zeit A keine Prämie mehr vom Versicherten geleistet werden soll, stimmen der wahrscheinliche Wert der Leistungen des Versicherers und die Reserve (beide Werte auf die Zeit m bezogen) überein. Bei einmaliger Prämie trifft dies identisch in m zu, sobald die Einzahlung der einmaligen Prämie stattgefunden hat.

14. Es ist notwendig $V_m = A_m > 0$. Dagegen kann bei periodischer Prämienzahlung

$$V_m < 0 \qquad (3')$$

sein. V_m bedeutet dann die Größe des Verlustes, den der Versicherer zur Zeit m erleiden würde, wenn der Versicherte zu derselben Zeit und vor der Einzahlung neuer Prämien die Versicherung aufgeben sollte. Die Möglichkeit eines solchen Verlustes führt im allgemeinen dahin, die Versicherungsformen und die Lebensalter von der Versicherung auszuschließen, bei denen für irgendwelche Werte von m die Ungleichung (3′) eintreten könnte.

Das Auftreten negativer Reserven ist gewöhnlich bei den Versicherungen auf einzelne Leben und den in der Praxis üblichen Lebensaltern ausgeschlossen; bei ihnen ist im allgemeinen eine konstante Prämie dazu bestimmt, ein mit dem Alter des Versicherten zunehmendes Risiko zu decken. Eine Abnahme des Risikos könnte dagegen durch eine Abnahme der versicherten Summe oder die Verabredung zunehmender Prämien bedingt sein. Im ersten Falle genügt es, die Prämien nach demselben Gesetz abnehmen zu lassen, nach welchem die Versicherungssumme abnimmt; die Grenzen, innerhalb welcher die Einführung zunehmender Prämien technisch zulässig ist, müssen in jedem einzelnen Falle untersucht werden.

Nicht so einfach gestaltet sich die Untersuchung über die Möglichkeit des Vorkommens negativer Reserven bei den Versicherungen auf Gruppen.

Sie können, z. B. bei Überlebensrenten oder bei Überlebensversicherungen mit gleichbleibender Jahresprämie eintreten, bei welchen das Alter des Versorgers kleiner ist, als dasjenige des Versorgten.

Setzen wir eine Überlebensrente oder eine Überlebensversicherung auf (y) zugunsten des (x) und $y < x$ voraus, so vermindert sich die ursprünglich positive Reserve, sobald die Abnahme der Reserve, die durch das Wachsen des Alters des Versorgten (x) bedingt ist, größer ist als die Zunahme der Reserve, welche vom Wachsen des Alters y des Versorgers abhängig ist. So kann eventl. die Reserve nach und nach negativ werden; tritt dies ein, so hört sie nur dann auf, kleiner als Null zu sein, falls (y) vor (x) stirbt.

Allgemeiner läßt sich der Sachverhalt folgendermaßen beschreiben. Das Absterben eines oder mehrerer Individuen einer Gruppe kann einen endlichen Sprung im Bestande der Reserve eintreten lassen und das Risiko des Versicherers unstetig erhöhen oder erniedrigen, soweit eben die Zusammensetzung der versicherten Gruppe und infolgedessen auch die Form der Versicherung dadurch geändert wird. Würde die Versicherung erst nach dem erwähnten Absterben in Kraft treten, so würde ihr eine Prämie entsprechen, die von der ursprünglichen Prämie abweicht.

Solche Vermehrungen oder Verminderungen der Reserve sind keineswegs als Verluste oder als Gewinne des Versicherers zu betrachten, sie entsprechen vielmehr dem Eintreten der Bedingungen, die vom Anfangszustande zum Endzustande der Gruppe führen, bei welchem die Leistungen des Versicherers stattfinden oder aufhören sollen. Sie würden auch in dem Falle eintreten, daß alle Versicherungen einer Gesamtheit so verlaufen, daß am Ende jeder derselben weder Verluste noch Gewinne für den Versicherer vorhanden sind.

Die Reserve der Versicherung auf eine Gruppe wird am Ende eines bestimmten Versicherungsjahres negativ, falls die von der postulierten Zustandsänderung der Gruppe hervorgebrachte Verminderung der Reserve größer ist, als die Reserve, die man zur selben Zeit gehabt hätte, wenn die Zustandsänderung nicht eingetreten wäre. In letzterem Falle genügen die eingezahlten Prämien, um das Risiko zu decken, im ersteren nicht.

In der Praxis ersetzt man negative Reserven in der Bilanz meist durch Null: man betrachtet also den Verlust als unmittelbar und gewiß, den man erleiden würde, wenn der Versicherte bzw. die Versicherten ihre Polize aufgeben sollten.

§ 4. Die Bildung der Reserven-Risikoprämien und Sparprämien.

15. Es sei $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x$, $A = A_x = 1 - d\mathbf{a}_x$. Es ist dann auch

$$P = P_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d$$

und

$$V_m = {}_mV_x = 1 - d\mathbf{a}_{x+m} - \mathbf{a}_{x+m}\left(\frac{1}{\mathbf{a}_x} - d\right) = 1 - \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x}. \quad (4)$$

Es ist $V_m = {}_mV_x > 0$ allemal wo $\mathbf{a}_{x+m} < \mathbf{a}_x$. Man beweist, daß aus dieser Ungleichung für $m' > 0$, die andere

$${}_{m+m'}V_x > {}_mV_n$$

folgt.

Wegen Gleichung (4) ist

$$(1 - {}_mV_x)(1 - {}_{m'}V_{x+m}) = \frac{\mathbf{a}_{x+m+m'}}{\mathbf{a}_{x+m}} \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x} = 1 - {}_{m+m'}V_x$$

also auch

$${}_mV_x = 1 - (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1}) \ldots (1 - {}_1V_{x+m-1}) \quad (5)$$

und wegen $0 < {}_mV < 1$

$${}_1V_x < {}_2V_x < {}_3V_x < \cdots$$

wie behauptet wurde.

Die Formeln (4) und (5) und die Betrachtungen, die auf sie gegründet werden, lassen sich unmittelbar auf alle Versicherungsformen ausdehnen, für welche die jährliche Prämie P durch

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}} - P$$

definiert wird, z. B. auf Versicherungen auf das kürzeste Leben und auf gemischte Versicherungen (auf einzelne Leben oder auf Gruppen).

16. Es bezeichne P_m die konstante Jahresprämie, die der Versicherte zu leisten hätte, wenn alle übrigen Elemente der Versicherung als gleich vorausgesetzt, die Versicherung zu der Zeit abgeschlossen würde, zu welcher die Bestimmung der Reserve stattfindet.

Ersetzen wir A_m durch $P_m \cdot \mathbf{a}_m$, so liefert Gleichung (2):

$$V_m = (P_m - P)\mathbf{a}_m \tag{6}$$

$$= A_m\left(1 - \frac{P}{P_m}\right). \tag{7}$$

Man hat positive oder negative Reserven, je nachdem

$$P_m \gtrless P$$

ist. Man sieht unmittelbar, wie Gleichung (6) direkt begründet werden kann. $P_m - P$ ist die Summe, welche der Versicherte (bzw. die versicherte Gruppe) jährlich zu wenig zahlt, gegenüber der Prämie P_m, die gezahlt werden müßte, wenn die Versicherung zur Zeit m neu abgeschlossen würde. Der wahrscheinliche gegenwärtige Wert dieser in Zukunft zu wenig eingehenden Prämien soll als Überschuß vorher geleisteter Prämien, d. h. als Reserve vorhanden sein (*prospektive* Definition der Reserve); dabei bedeutet $\mathbf{a}_m$ die Rente für die noch übrige Dauer der Versicherung, und es ist für $m = 0$

$$P_m = P, \quad V_m = 0, \quad A_m = P \cdot \mathbf{a}_m.$$

Den Minderzahlungen des Versicherten nach der Zeit m, $(m = m)$ müssen also in der Periode $(0, m)$ Mehrzahlungen entsprechen gegenüber dem Risiko, welches der Versicherer in derselben Periode zu decken hat.

Ist die Reserve

$$V_m = (P_m - P)\mathbf{a}_m$$

negativ, so werden den Minderzahlungen der Periode $(0, m)$ Mehrzahlungen in den nachfolgenden Versicherungsjahren entsprechen.

Wir können also auch die Reserve als die Differenz zwischen den auf die Zeit m bezogenen Werten der Leistungen des Versicherten (bzw. der versicherten Gruppe) und des Versicherers in dem Zeitintervall $(0, m)$ auffassen (*retrospektive* Definition der Reserve).

Die Übereinstimmung beider Reserven (d. h. der prospektiven und der retrospektiven Reserve) ist durch die Übereinstimmung der Rechnungsgrundlagen mit der durchschnittlichen Wirklichkeit bedingt.[1])

1) Vgl. Einleitung, Seiten 4 und 5.

17. Es seien U_m, P_m, T_m nicht negative Größen, und es werde, mit Herrn *v. Bortkievicz*[1]), der Begriff einer *Integralversicherung* eingeführt. Darunter versteht man eine Versicherung, kraft welcher sich der Versicherte verpflichtet, am Anfang jedes m^{ten} Jahres die Summe P_m zu zahlen, während die Verpflichtungen des Versicherers in der Auszahlung der U_m, falls der Versicherte nach m Jahren noch lebt, oder der Summe T_m, falls der Versicherte im Laufe des m^{ten} Jahres verstorben ist, am Ende des m^{ten} Jahres bestehen.

Ist q die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versicherte im Laufe des m^{ten} Versicherungsjahres stirbt, $p = 1 - q$, und behalten V_m und $r = v^{-1}$ die schon angegebene Bedeutung, so besteht offenbar die Identität

$$(V_{m-1} + P_m)r = (v_m + V_m)p + T_m q.$$

Es folgt aus ihr:

$$P_m = vq(T_m - U_m - V_m) + (vV_m - V_{m-1}) + vU_m \tag{8}$$

$$= vp(U_m + V_m - T_m) + (vV_m - V_{m-1}) + v(T_m - V_m) \tag{9}$$

und die Zerlegung der Prämie in die drei Komponenten

$$P'_m = vq(T_m - U_m - V_m);$$

bzw.

$$P'_m = vp(U_m + V_m - T_m);$$

$$P''_m = vV_m - V_{m-1};$$

$$P'''_m = vV_m;$$

bzw.

$$P'''_m = v(T_m - V_m),$$

welche der zitierte Schriftsteller bzw. *Risikoprämie, Sparprämie* und *Restprämie* nennt. Die Summe

$$R_m = \pm(U_m + V_m - T_m)$$

ist die *Risikosumme.* Man legt die Zergliederung (8) bzw. (9) zugrunde, je nachdem

$$T_m - U_m - V_m \gtrless 0.$$

1) *Risikoprämie und Sparprämie* usw. in Ehrenzweigs „Ass. Jahrbuch", XXIV.

Berücksichtigen wir, daß $V_0 = 0$, so können wir schreiben:

$$\sum_{s=1}^{s=m} P_s'' r^{m-s+1} = \sum_{s=1}^{s=m} r^{m-s+1}(vV_s - V_{s-1}) = (vV_1 - V_0) r^m$$

$$+ (vV_2 - V_1)\, \varepsilon^{m-1} + \cdots + (vV_m - V_{m-1}) r = V_m .$$

Es sind die kapitalisierten Sparprämien, welche die Reserve bilden.[1]) Wir können uns einen Versicherer denken, der die Sparprämien behält, und daraus die Reserven bildet, dagegen die Differenzen zwischen den versicherten Kapitalien und den Reserven bei anderen gegen die Prämie $P_m' + P_m'''$ rückversichert.

Die einmalige Versicherungsprämie, die den jährlichen Prämien $P_m' + P_m'''$ entspricht, nennt *Wright* *„insurance value"*.

Ein solcher Versicherer würde keine Versicherungstätigkeit üben, sondern einfach als Sparkasse fungieren. Praktisch kann die Rückversicherung auf die Summe $1 - V_m - M$ beschränkt werden, wobei M das Maximum bezeichnet, das der Versicherer für sich behält (das *Plenum* des Versicherers).

Es ist, falls (x) das versicherte Individuum ist, und $T_m = 1$, $U_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$ angenommen wird

$$P_m' = v q_{x+m-1}(1 - {}_mV_x).$$

Man nennt $v q_x$ die *natürliche Prämie*, die der Einheitssumme und dem Alter x entspricht. Es ist offenbar

$$v q_x = \frac{C_x}{D_x}$$

d. h. die natürliche Prämie ist die Prämie einer einjährigen Todesfallversicherung. Man sieht leicht, daß, wegen

---

1) Setzen wir

$$p + q = p_m', \quad q = p_m'', \quad V_m = T_m = 1 .$$

Es sind die Größen

$$\pi_m' = P_m' + P_m''' = v(p' - p_m'')$$

$$\pi_m'' = P_m - \pi_m' = vV_m - V_{m-1} = P_m'',$$

welche *Bohlmann* (*Encyklopädie*, Seite 882) Risiko- bzw. Sparprämie nennt.

Man vergleiche über denselben Gegenstand: *Landré*, op. cit. Seite 298 und ff., und Zeitschrift für Versicherungsrecht und Wissenschaft (Bd. IV) und Archief for de Verzekeringswetenskap (Bd. V).

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \cdots = v q_x + \frac{D_{x+1}}{D_x} v q_{x+1} + \cdots$$

$$P_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x}\left\{ v q_x + \frac{D_{x+1}}{D_x} v q_{x+1} + \cdots \right\}$$

die Ungleichungen $q_x < q_{x+1} < \cdots$ die andere

$$P_{x'} > v q_{x'}$$

für alle Alter x' zwischen x und $x + \sigma > x$, und die Ungleichung

$$P_{x'} < v q_{x'}$$

für $x' > x + \sigma$ mit sich bringen. Das Bestehen der Ungleichungen

$$q_x < q_{x+1} < \cdots$$

ist also bei der Todesfallversicherung hinreichend, um die Möglichkeit negativer Reserven auszuschließen.

§ 5. **Beispiel einer retrospektiven Bestimmung der Reserve.**

18. Es bezeichne $\Pi_{x\overline{n}|}^{\,1}$ und $(1 + \alpha)\Pi_{x\overline{n}|}^{\,1}$ die Netto- bzw. die Bruttoprämie eines Erlebenskapitals auf (x), das nach n Jahren zu zahlen ist. Stirbt der Versicherte vor dem Alter $x + m$, so werden alle eingezahlten Prämien zurückerstattet. Es ist (§ 2, Seite 270)

$$\pi_{x\overline{n}|}^{\,1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n-1} - (1 + \alpha)\{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}\}} .$$

Es sind

$$\pi_{x\overline{n}|}^{\,1} \cdot {}_m\mathbf{a}_x$$

bzw.

$$(1 + \alpha)\pi_{x\overline{n}|}^{\,1}(IA)_{x\overline{m}|}^{\,1},$$

[wobei

$$(IA)_{x\overline{m}}^{\,1} = \frac{R_x - R_{x+m} - m M_{x+m}}{D_x}$$

zu setzen ist (vgl. S. 221, Formel (29))] die wahrscheinlichen Werte der Leistungen des Versicherten bzw. des Versicherers in den ersten m Versicherungsjahren am Anfang der Versicherung. Beziehen wir auch die Reserve ${}_mV_x$ auf den Anfang der Versicherung so erhalten wir

$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\, {}_mV_x = \pi_{x\overline{n}}^{\,1}\left({}_{|n}\mathbf{a}_x - (1 + \alpha)(IA)_{x\overline{m}}^{\,1}\right)$$

und indem wir $\pi_{x\overline{n}|}^{\,1}$, $|_m\mathsf{a}_x$, $(IA)_{x\overline{m}|}^{\,1}$ mittels der Kommutationssymbole ausdrücken

$$ {}_mV_x = \Pi_{x\overline{n}|}^{\,1} \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1} - (1+\alpha)\{R_x - R_{x+m} - m \cdot M_{x+m}\}}{D_{x+m}} $$

$$ = \frac{\pi_{x\overline{n}|}^{\,1}}{\pi_{x\overline{m}|}^{\,1}}. \qquad (10) $$

$\alpha = 0$ entspricht die Annahme, daß im Falle des Absterbens von (x) vor dem Alter $x + n$ nur die Nettoprämien zurückerstattet werden.

$\alpha = -1$ die Annahme, daß keine Rückgewähr der Prämien stattfindet. Formel (10) wird in diesem Falle zu

$$ {}_mV_x = \frac{P_{x\overline{n}|}^{\,1}}{P_{x\overline{m}|}^{\,1}}, $$

wobei

$$ P_{x\overline{n}|}^{\,1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. $$

§ 6. Die Gruppierung der Polizen. Die Rekursionsformeln zur Bestimmung der Reserven.

19. Die Bestimmung der Reserve findet gewöhnlich am Ende jedes Geschäftsjahres statt, also meistens am Ende jedes Kalenderjahres. Dagegen werden die meisten Versicherungen nicht am Anfang, sondern im Laufe des Jahres abgeschlossen. Es entsteht also die Frage, die Reserve von Versicherungen zu bestimmen, die zu einer verschiedenen Anzahl von Jahresterminen abgeschlossen worden sind.

Es ist praktisch zweckmäßig, von der Annahme auszugehen, daß alle Versicherten inmitten des Jahres beigetreten sind. Aus dieser Annahme folgert man entweder daß alle Versicherungen, die im $m - r$-ten Geschäftsjahre abgeschlossen wurden, seit $r + \frac{1}{2}$ Jahren bestehen, oder, daß dieselben die Dauer r bzw. $r + 1$ haben, je nachdem der Eintritt der Versicherten im zweiten bzw. im ersten Halbjahre stattfand.

Eine angenäherte und praktisch genügende Bestimmung von ${}_{m+\frac{1}{2}}V$ erreicht man, indem man annimmt, daß die Zahlung der

ersten Prämie nach einem halben Jahr stattfinden wird, und

$$ A_{(m+\frac{1}{2})} = \tfrac{1}{2}\{A_{(m)} + A_{(m+1)}\} $$

$$ \mathsf{a}_{(m+\frac{1}{2})} = \tfrac{1}{2}\{\mathsf{a}_{(m)} + \mathsf{a}_{(m+1)}\} $$

$$ {}_{\frac{1}{2}}|\mathsf{a}_{(m)} = \mathsf{a}_{(m)} - \tfrac{1}{2} $$

setzt. Man erhält aus

$$ V_m = A_{(m)} - P_{\frac{1}{2}}|\mathsf{a}_{(m)} $$

für m gleich $m + \frac{1}{2}$:

$$ V_{m+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(A_{(m)} + A_{(m+1)}) - P\tfrac{1}{2}(\mathsf{a}_{(m)} + \mathsf{a}_{(m+1)}) + \tfrac{1}{2}P $$

$$ = \tfrac{1}{2}(A_{(m)} - P \cdot \mathsf{a}_{(m)}) + \tfrac{1}{2}(A_{(m+1)} - P \cdot \mathsf{a}_{(m+1)}) + \tfrac{1}{2}P $$

$$ = \frac{{}_{m+1}V + {}_mV}{2} + \frac{1}{2}P. \qquad (11) $$

20. Um die Bestimmung der Reserve jeder einzelnen Polize zu vermeiden, kann man alle in Betracht kommenden Versicherungen in so viele Klassen teilen, als Altersklassen vorhanden sind — oder, falls es sich um temporäre Versicherungen handelt, in so viele Altersklassen, als binäre Kombinationen (x, y) vorhanden sind, wo x das jetzige und y das Alter bezeichnen, in welchem die Versicherung fällig wird. Bezeichnen wir mit S den Betrag, mit $P \cdot S$ die Prämie einer bestimmten Versicherung, und mit ΣS und $\Sigma P \cdot S$ die Summe der Beträge und der Prämien aller Versicherungen einer bestimmten Altersklasse, oder einer bestimmten Alters- und Dauerklasse — z. B. der Klasse x und der Alters- und Dauerklasse $(x, y - x)$ — so werden die entsprechenden Gesamtreserven durch

$$ (A_x - P \cdot \mathsf{a}_x)\Sigma S $$

bzw. durch

$$ (A_{x:\overline{y-x}|} - P \cdot \mathsf{a}_{x:\overline{y-x}|})\Sigma S $$

ausgedrückt.

21. Es läßt sich aber, indem man von einer früher abgeleiteten Beziehung ausgeht, zeigen, daß man die Gruppierung auf alle Versicherungen einer Altersklasse unbekümmert um die Versicherungsform und die verflossene Dauer ausdehnen kann.

Wir haben gesehen, daß die Identität gilt (S. 277):

$$ V_{m-1} + P_m = vp_{x+m-1}(U_m + V_m) + vq_{x+m-1}T_m, $$

wo V_m die Reserve am Ende des m^{ten} Versicherungsjahres bezeichnet.

Man erhält daraus:

$$ {}_mV_x = \frac{{}_{m-1}V_x + P_m - vq_{x+m-1}T_m}{vp_{x+m-1}} - U_m \tag{12}$$

oder, indem man alle Versicherungen, für welche x das Alter des Versicherten ist, addiert:

$$\Sigma V_m = \frac{\Sigma V_{m-1} + \Sigma P_m - vq_{x+m-1}\Sigma T_m}{vp_{x+m-1}} - \Sigma U_m. \tag{13}$$

Das Alter ist hier das einzige Unterscheidungsmerkmal: es wird weder nach der verflossenen Dauer der Versicherung, noch nach der Dauer überhaupt, noch nach der Form der Versicherung (natürlich angenommen, daß die Rechnungsgrundlagen aller Versicherungen dieselben sind) unterschieden. Nehmen wir an, daß $U_m = \Sigma U_m = 0$, so liefert die Gleichung (13) die Rekursionsformel, die Herr *Fouret* zuerst angegeben hat.[1])

Es soll jedoch hervorgehoben werden, daß die getrennte Bestimmung der Reserven für die verschiedenen Versicherungsformen praktisch sehr wichtig ist, da sie die Bestimmung der finanziellen Resultate und der Gewinne der einzelnen Formen ermöglicht; eine Bestimmung, welcher sowohl in theoretischer wie in praktischer Hinsicht die größte Bedeutung zukommt.

Ferner heben wir hervor, um die Bedeutung der Bezeichnungen ΣV_m und ΣV_{m-1} zu erklären, daß dieselben weiter nichts als den gesamten Betrag der Reserven ausdrücken, die am Anfang und am Ende des m^{ten} Geschäftsjahres vorhanden sind; es kommt also auf die verflossene Dauer jeder einzelnen Versicherung nicht an, was dagegen der Fall wäre, wenn man sie als Summen der Reserven der Versicherungen, die seit m bzw. seit $\overline{m-1}$ Jahren abgeschlossen worden sind, interpretieren wollte.

1) Bulletin de l'Institut des Actuaires Français, Bd. I und IV. Vgl. über die Anwendung von Rekursionsformeln auf die Bestimmung der Reserven. *Pothérin du Motel, Théorie des Assurances sur la Vie,* S. 283 ff.

§ 7. **Die Reserven von Bruttoprämien. Zillmers Prämien und Reserven.**

22. Es sei ganz allgemein

$$V'_m = A_m - P'\cdot \mathbf{a}_m, \tag{14}$$

wo

$$P' \neq P = \frac{A_m}{\mathbf{a}_m}.$$

Gründe verschiedener, aber rein technischer Natur können dahin führen, Formel (14) zugrunde zu legen. Als solche sind zu erwähnen: der Übergang von gewissen Rechnungsgrundlagen zu anderen davon verschiedenen, ohne daß es möglich ist, auch die Nettoprämien zu ändern, oder die Anwendung von Sterblichkeitstafeln mit doppeltem Eingang.

Die Annahme von $P' \neq P$ und besonders von $P' > P$ kann dagegen auch von finanziellen Rücksichten herrühren. Unter diesen ist der Wunsch besonders wichtig, möglichst kleine Reserven als Ergebnis der Rechnung zu haben, um die Gewinne der ersten Geschäftsjahre möglichst hoch zu bestimmen. Wir nehmen uns vor, zu untersuchen, innerhalb welcher Grenzen eine solche Bestrebung als zulässig anzusehen ist.

23. Ist αP der Gesamtzuschlag zu der Nettoprämie P und in der Gleichung (14)

$$P' = (1+\alpha)P,$$

so ist V'_m eine *Bruttoprämienreserve;* man nennt dagegen V'_m eine Reserve von *Reserve-* oder *Inventurprämien,* falls

$$P' = (1+\alpha_1)P$$

und α_1 der Zuschlag für erste Unkosten ist.

Das erste Verfahren ist desto weniger legitim, je größer der Zuschlag zu der Prämie ist; es kann zur Bestimmung von Reserven

$$V'_m = \{P_{(m)} - (1+\alpha)P\}\mathbf{a}_{(m)}$$

führen, die kleiner sind, als Null. Für alle Werte $P_{(m)} < (1+\alpha)P$ verfügt man in den ersten Jahren zur Deckung der Ausgaben über größere Summen, als diejenigen, die man als Deckungskapital für die entsprechenden und die zukünftigen Risiken einkassiert hat.

Für den Versicherer hängt die Möglichkeit, zukünftige Auszahlungen zu leisten von dem ununterbrochenen und fortschreiten-

den Zugang neuer Versicherter ab. Bleibt der Zugang neuer Versicherungen stationär, oder nimmt er ab, so kann der Versicherer in die Lage kommen, daß die Gewinne nicht genügen, um die Ausgaben zu decken.

Es sei

$$\alpha_1 = \frac{k}{\mathbf{a}},$$

wo $\mathbf{a}$ die pränumerando zahlbare Einheitsrente ist, die der Modus der Prämienzahlung definiert.

Das, was wir über die Methode der Bestimmung der Reserven nach Bruttoprämien sagten, gilt auch für die Anwendung von Reserveprämien, allemal wo k derart bestimmt ist, daß für irgend einen Wert m

$$V'_m = \{P_{(m)} - (1 + \alpha_1)P\}\,\mathbf{a}_{(m)} < 0$$

ist. Wir nennen *Zillmers Maximum der ersten Unkosten* den größten Wert χ von k, für welchen

$$V_m \geqq 0$$

ist, *Zillmersche Prämie* die Größe

$$\pi \leqq P + \frac{\chi}{\mathbf{a}} = P + \alpha'$$

$$\left(\alpha' = \frac{\chi}{\mathbf{a}}\right),$$

Zillmersche Reserve den Überschuß

$$V'_m = A_{(m)} - \pi\,\mathbf{a}_{(m)}$$

des Wertes der noch laufenden Versicherung über den Wert der noch zu erwartenden Zillmerschen Prämien.

Für die Versicherungen mit steigender Reserve (als solche sind die Todesfallversicherungen für die normalen Alter zu betrachten) ist das Zillmersche Kriterium erfüllt, wenn die Ungleichung befriedigt ist:

$$A_{(1)} - \pi\,\mathbf{a}_{(1)} \geqq 0,$$

woraus man ableitet:

$$\pi \leqq \frac{A_{(1)}}{\mathbf{a}_{(1)}}$$

und wenn x das Alter des Versicherten beim Abschluß der Versicherung ist:

$$\pi = P_{x+1}$$

$$\alpha' = P_{x+1} - P_x$$

$$\chi = (P_{x+1} - P_x)\,\mathbf{a}_x.$$

Es ist also α' das Maximum des Zuschlags für erste Unkosten; der größte Wert derselben ist dagegen gleich der Differenz von P_{x+1} und der natürlichen Prämie des ersten Versicherungsjahres.

Er ist z. B. für die Todesfallversicherung gleich

$$P_{x+1} - v q_x.$$

Dies erklärt man, indem man bemerkt, daß sich zu der Prämienquote, die man verbraucht hat, und die sonst zur Bildung der Reserve gedient hätte (diese Prämienquote ist gleich der Differenz von P_x und der Risikoprämie $v q_x$), der Zuschlag α' addiert. Man hat

$$P_x - v q_x + P_{x+1} - P_x = P_{x+1} - v q_x,$$

wie behauptet wurde.

Das hier geschilderte Verfahren, das in allen den Fällen anwendbar ist, in welchen ohne Bedenken das Nettoreserveverfahren angewendet werden kann, ist Gegenstand nicht durchaus begründeter Kritiken und Debatten gewesen, von denen besonders in der deutschen Versicherungsliteratur Spuren zu finden sind.[1]) Seine praktische Tragweite darf aber nicht übertrieben werden; es ist nicht immer faktisch möglich, innerhalb der Grenzen zu bleiben, die Zillmer für die ersten Unkosten vorschreibt. Besonders bei niedrigerem x ist eine solche Möglichkeit nicht vorhanden; möglich ist es dagegen, daß die Erwerbskosten des Zugangs in Summa die Zillmersche Grenze nicht überschreiten. Das ist auch allerdings dasjenige, worauf es praktisch ankommt.

Die Zillmersche Methode hat besonders für junge Gesellschaften, deren Grundkapitalien mäßig sind, Vorzüge; indem nach

1) *Zillmer, Beiträge zur Theorie der Prämienreserve,* Stettin 1863. Wir folgen hier besonders der Bohlmannschen Darstellung (Encyklop. Seiten 891, 892). Nach § 11 des Deutschen Reichsgesetzes über die Privatversicherungsunternehmungen vom 12. Mai 1901 soll der Geschäftsplan einer Lebensversicherungsunternehmung angeben, ob und in welchem Maße bei der Berechnung der Prämienreserve eine Methode angewandt werden soll, nach welcher anfänglich nicht die volle Prämienreserve zurückgestellt wird, wobei jedoch der Satz von zwölfeinhalb pro Mille der Versicherungssumme nicht überschritten werden darf. Das Gesetz setzt also eine Grenze fest, über welche hinaus das *Zillmern* keinesfalls zugelassen ist. In Preußen hat die Aufsichtsbehörde für neuentstehende Anstalten die Zillmersche Methode nicht zugelassen, bestehenden Anstalten für die Todesfallversicherung das Zillmern bis zu $12\frac{1}{2}$ ‰ der versicherten Summe, aber nur bis zum Jahre 1910 erlaubt.

ihr eine allmähliche Amortisation der ersten Unkosten vorgenommen wird, wird auch das finanzielle Ergebnis der ersten Geschäftsjahre günstiger gemacht, und dadurch die Möglichkeit geboten, in die Höhe zu kommen.

§ 8. Abhängigkeit der Prämien und Reserven von den Rechnungselementen.

24. Offenbar nimmt

$$\mathbf{a}_x = 1 + vp_x + v^2 p_x p_{x+1} + \cdots$$

mit v zu, also mit dem Zinsfuße i ab. Es läßt sich leicht zeigen, daß einer additiven Änderung des Zinsfußes eine multiplikative Änderung aller Überlebenswahrscheinlichkeiten entspricht. Genauer ausgedrückt: der Wert $\mathbf{a}_x$ einer Leibrente auf (x) bleibt ungeändert, wenn man gleichzeitig den Zinsfuß um ε vermehrt und die Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_x, p_{x+1} \ldots$ bzw. durch $\left(1 + \frac{\varepsilon}{1+i}\right) p_x$, $\left(1 + \frac{\varepsilon}{1+i}\right) p_{x+1}$ ersetzt.

Es sei

$$i' = i + \varepsilon,\ v' = \frac{1}{1+i'}.$$

Man hat offenbar

$$v' = \frac{1}{1+i+\varepsilon} = v \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1+i}} = vw,$$

falls wir der Kürze halber $w = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1+i}}$ setzen.

Bezeichnen wir mit $\mathbf{a}_x'$ den i' entsprechenden Wert der Rente, so folgt aus

$$\mathbf{a}_x' = 1 + vwp_x + v^2 w^2 p_x p_{x+1} + \cdots$$
$$= 1 + v(wp_x) + v^2 (wp_x)(wp_{x+1}) + \cdots$$

die gemachte Aussage.

Aus dem Gesagten folgt auch, daß die absolute Größe der Differenz $\mathbf{a}_x' - \mathbf{a}_x$ eine abnehmende Funktion des Zinsfußes ist.

Es ist

$$\frac{d\mathbf{a}_x}{dv} = p_x + 2vp_x p_{x+1} + 3v^2 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \cdots$$
$$= p_x(1 + 2vp_{x+1} + 3v^2 p_{x+1} p_{x+2} + \cdots)$$
$$= p_x (I\mathbf{a})_{x+1} = p_x \frac{\Sigma\Sigma D_{x+1}}{D_{x+1}}$$
$$\frac{d^2\mathbf{a}_x}{dv^2} = 2p_x p_{x+1} + 3 \cdot 2vp_x p_{x+1} p_{x+2} + \cdots$$
$$= 2p_x p_{x+1}(1 + 3vp_{x+2} + 6v^2 p_{x+2} p_{x+3}$$
$$+ 10v^3 p_{x+2} p_{x+4} + \cdots) = 2p_x p_{x+1} \frac{\Sigma\Sigma\Sigma D_{x+2}}{D_{x+2}}.$$

. . . .

Entwickeln wir $\mathbf{a}_x'$ nach ganzen Potenzen von v, so können wir also schreiben:

$$\mathbf{a}_x' = \frac{\Sigma D_x}{D_x} + (v' - v)p_x \frac{\Sigma\Sigma D_{x+1}}{D_x} + (v' - v)^2 p_x p_{x+1} \frac{\Sigma\Sigma\Sigma D_{x+2}}{D_x}$$
$$+ (v' - v)^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} \frac{\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma D_{x+3}}{D_x} + \cdots$$
$$\mathbf{a}_x' = \frac{1}{D_x} \{ \Sigma D_x + p_x(v' - v)\Sigma\Sigma D_{x+1}$$
$$+ p_x p_{x+1}(v' - v)^2 \Sigma\Sigma\Sigma D_{x+2} + \cdots \},$$

wo die Werte D_x dem Zinsfuße i entsprechen. Mittels dieser und ähnlicher Reihenentwicklungen hat man die genäherte Bestimmung des Wertes $\mathbf{a}_x'$ einer Rente, welche dem Zinsfuß i' entspricht, aus dem Werte $\mathbf{a}_x$ einer dem Zinsfuße i entsprechenden Rente abgeleitet. Die abgeleitete Reihe konvergiert aber, auch für kleine Werte von $|v' - v|$, zu langsam, um mit Nutzen angewandt werden zu können.

25. Wie $\mathbf{a}_x$ nehmen auch A_x, $A_{x\overline{n}|}$ mit i ab; es handelt sich darum, zu untersuchen, wann dasselbe für

$$P_x = \frac{A_x}{\mathbf{a}_x}, \quad P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{{}_{|n}\mathbf{a}_x}$$

stattfindet. Es gilt der Satz:

„Ist $p_x > p_{x+1} > p_{x+2} > \cdots$ so nimmt P_x mit dem Wachsen von i ab, d. h. es ist $\frac{dP_x}{di} < 0$.“

Offenbar ist

$$\frac{dP_x}{di} = \frac{d}{di}\left[\frac{1}{\mathbf{a}_x} - 1 + v\right] = -\frac{d\mathbf{a}_x}{dv}\,\frac{dv}{di}\,\frac{1}{\mathbf{a}_x^2} + \frac{dv}{di}$$

$$= -\frac{dv}{di}\left[\frac{1}{\mathbf{a}_x^2}\,\frac{d\mathbf{a}_x}{dv} - 1\right].$$

Es ist $\frac{dv}{di} < 0$, also auch $\frac{dP_x}{di}$ negativ, falls

$$\frac{1}{\mathbf{a}_x^2}\,\frac{d\mathbf{a}_x}{dv} - 1 < 0.$$

Daraus folgt, wenn man die schon gefundene Gleichung berücksichtigt:

$$\frac{d\mathbf{a}_x}{dv} = (I\mathbf{a})_{x+1} \cdot p_x$$

daß die hinreichende Bedingung dafür, daß P_x eine abnehmende Funktion von i sei,

$$p_x(I\mathbf{a})_{x+1} < \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x$$

ist, also

$$p_x(1 + 2vp_{x+1} + 3v^2p_{x+1}p_{x+2} + \cdots) < \mathbf{a}_x + vp_x\mathbf{a}_x + v^2p_xp_{x+1}\mathbf{a}_x + \cdots$$

oder wegen

$$\begin{aligned} 1 + 2vp_{x+1} + 3v^2p_{x+1}p_{x+2} + \cdots = 1 + vp_{x+1} &+ v^2p_{x+1}p_{x+2} + \cdots \\ + vp_{x+1} &+ v^2p_{x+1}p_{x+2} + \cdots \\ &+ v^2p_{x+1}p_{x+2} + \cdots \\ = \mathbf{a}_{x+1} + vp_{x+1} \cdot \mathbf{a}_{x+2} + v^2p_{x+1}p_{x+2} \cdot \mathbf{a}_{x+3} + \cdots \end{aligned}$$

$$p_x\mathbf{a}_{x+1} + vp_x \cdot p_{x+1} \cdot \mathbf{a}_{x+2} + v^2p_xp_{x+1}p_{x+2} \cdot \mathbf{a}_{x+3} + \cdots$$
$$< \mathbf{a}_x + vp_x\mathbf{a}_x + v^2p_xp_{x+1}\mathbf{a}_x + \cdots.$$

Ist $p_x > p_{x+1} > p_{x+2}$, so ist auch $\mathbf{a}_x > \mathbf{a}_{x+1} > \mathbf{a}_{x+2} > \cdots$ und die Ungleichung offenbar befriedigt. Damit ist aber auch die gemachte Aussage bewiesen.

Wird $p_{x+n-1} = p_{x+n} = \cdots = 0$ angenommen, so werden A_x und P_x zu $A_{x\overline{n}|}$ und $P_{x\overline{n}|}$: das, was wir für die einmalige und die jährliche Prämie der Todesfallversicherung sagten, gilt also auch für die gemischte Versicherung.[1])

[1]) Daß die Prämien aller Versicherungen auf Erlebensfall mit wachsendem Zinsfuße abnehmen, wird der Leser unmittelbar einsehen.

26. Wie die Reserve der Todesfall- (und der gemischten) Versicherung mit dem Zinsfuße variiert, ergibt sich leicht aus den Beziehungen

$${}_1V_x = 1 - \frac{\mathbf{a}_{x+1}}{\mathbf{a}_x} = 1 - \frac{a_x}{vp_x(1 + a_x)}$$

$${}_mV_x = 1 - (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1}) \cdots (1 - {}_1V_{x+m-1}).$$

Differentiieren wir die erste nach v, indem wir die Indices 1 und x der Kürze halber weglassen, so erhalten wir:

$$\frac{dV}{dv} = -\frac{1}{p}\,\frac{v\frac{da}{dv} - a(1 + a)}{v^2(1 + a)^2}.$$

Ist $p_x > p_{x+1} > \cdots$ also $a_x > a_{x+1} > \cdots$, so ist auch

$$v\frac{da}{dv} = a_x + vp_xa_{x+1} + v^2p_xp_{x+1}a_{x+2} + \cdots$$

kleiner als

$$a(1 + a) = a_x + vp_xa_x + v^2p_xp_{x+1}a_x + \cdots$$

also $\frac{dV}{dv} > 0$, und wegen $\frac{dv}{di} < 0$:

$$\frac{dV}{di} = \frac{dV}{dv}\,\frac{dv}{di} < 0.$$

Aus

$$\frac{d_1V_x}{di} < 0, \quad \frac{d_1V_{x+1}}{di} < 0, \ldots$$

und aus der zweiten Beziehung für ${}_mV_x$ folgt, wie man unmittelbar sieht:

$$\frac{d_mV_x}{di} < 0.$$

Die Schlußfolgerung läßt sich auf die Reserve der gemischten Versicherung übertragen.

Ist also $p_x > p_{x+1} > \cdots$ so nehmen mit wachsendem Zinsfuß die Reserve der Todesfallversicherung mit gleichbleibenden terminlichen Prämien und diejenige der gemischten Versicherung ab.

Beschränken wir uns auf die Betrachtung der Todesfallversicherung und bringen diesen Satz in Zusammenhang mit der schon erwiesenen Tatsache, daß eine Vermehrung des Zinsfußes auf die Renten ebenso einwirkt, wie eine Verminderung der Lebenswahrscheinlichkeiten, so können wir ohne weiteres den Satz aussprechen:

Werden alle Überlebenswahrscheinlichkeiten mit demselben Faktor multipliziert, so nimmt die Reserve der konstanten Todesfallversicherung mit gleichbleibenden Prämien zu oder ab, je nachdem der Multiplikator kleiner oder größer als 1 ist.

Wachsen die Überlebenswahrscheinlichkeiten aller Alter von einem bestimmten Alter ab, während der Zinsfuß ungeändert bleibt, so nehmen offenbar die lebenslängliche und temporäre Leibrente ebenfalls ab, die jährliche gleichbleibende Prämie der lebenslänglichen Todesfallversicherung

$$P_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d$$

und diejenige der gemischten Versicherung

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{|n}\mathbf{a}_x} - d$$

aber zu. Dieser Vermehrung entspricht nicht immer eine Zunahme der Reserve. Es gilt insbesondere:

Ist der Betrag, um welchen die Sterblichkeit die Prämie erhöht, ein konstanter Bruchteil der Versicherungssumme, so nimmt die Reserve ab.

Es seien P und $\mathbf{a}$ die Prämie und die Leibrente (lebenslänglich oder auf n Jahre abgekürzt) für das Alter x, P_m und $\mathbf{a}_m$ die Prämie und die Leibrente (lebenslänglich oder auf $\overline{n-m}$ Jahre abgekürzt) für das Alter $x+m$, so folgt aus

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}} - d$$

und aus

$${}_mV_x = 1 - \frac{\mathbf{a}_m}{\mathbf{a}}$$

die Formel

$${}_mV_x = \frac{P_m - P}{P_m + d}.$$

Sind P' und P_m' die erhöhten Prämien, und ist $P_m' - P' = P_m - P$, so ist auch

$${}_mV_x' = \frac{P_m' - P'}{P_m' + d} < {}_mV_x,$$

w. z. b. w.

Der Annahme $P_m' = (1+\alpha)P_m$, $P' = (1+\alpha)P$ entspricht dagegen.

$${}_mV_x' = \frac{(P_m - P)(1+\alpha)}{(1+\alpha)P_m + d} > {}_mV_x$$

d. h.: Ist der Betrag, um welchen die Sterblichkeit die Prämie erhöht, ein konstanter Bruchteil der Prämie, so nimmt die Reserve zu.

Durch Kombination der beiden Sätze folgt:

Ist der Betrag, um welchen die Sterblichkeit die Prämie erhöht, eine lineare homogene Funktion von Prämie und Versicherungssumme, so kann die Reserve sowohl wachsen, als abnehmen, als konstant bleiben.

27. Daß die Prämie $P_{x\overset{1}{\overline{n}|}}$ der Erlebensversicherung mit dem Wachsen der Überlebenswahrscheinlichkeiten aller Alter zunimmt, und zwar in desto größerem Maße, je größer die gesamte Dauer n der Versicherung ist, ergibt sich, falls $k_r = \frac{p'_{x+r}}{p_{x+r}} > 1$ aus

$$P_{x\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{v^n k_0 k_1 \ldots k_{n-1} p_x p_{x+1} \cdots p_{x+n-1}}{1 + v k_0 p_x v^2 k_1 p_{x+1} + \cdots + v^{n-1} k_0 k_1 \cdots k_{n-2} p_x \cdots p_{x+n-2}}$$

$$> \frac{v^n p_x \cdots p_{x+n-1}}{1 + v p_x + \cdots + v^{n-1} p_x \cdots p_{x+n-2}} = P_{x\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Die Formel (§ 5, S. 280)

$${}_mV_x = \frac{P_{x\overset{1}{\overline{n}|}}}{P_{x\overset{1}{\overline{m}|}}} \qquad (m < n)$$

lehrt, daß die Reserve gleichfalls zunimmt. Sie nimmt zu auch in dem Falle, wo der Betrag, um welchen die Mindersterblichkeit die Prämie erhöht, ein konstanter Bruchteil der Versicherungssumme ist.

28. Es seien T bzw. T' Sterblichkeitstafeln, deren jede Überlebenssätze enthält, die teils größer, teils kleiner sind, als die Sätze der anderen, und $\mathbf{a}$, ${}_mV$, ...; $\mathbf{a}'$, ${}_mV'$ die auf Grund von T bzw. von T' bei demselben Zinsfuße berechneten Versicherungswerte. Es wird im Falle der Todesfallversicherung

$${}_mV_x' \gtrless {}_mV_x$$

sein, je nachdem

$$\frac{\mathbf{a}'_{x+m}}{\mathbf{a}'_x} \lessgtr \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x},$$

also

$$\frac{\mathbf{a}'_{x+m}}{\mathbf{a}_{x+m}} \lessgtr \frac{\mathbf{a}'_x}{\mathbf{a}_x}$$

ist. Hat man eine Tabelle der Verhältnisse $\frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{a}}$ hergestellt, so ist es auch möglich, anzugeben, für welche Eintrittsalter x und Dauern m die Tafel T größere Reserven liefert, als T'.

Es sei $\frac{\mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x'} = \text{konst.} = 1 + \chi$, also, identisch in x, ${}_mV_x' = {}_mV_x$. Es folgt aus

$$\mathbf{a}_x = (1+\chi)\mathbf{a}_x' = 1 + vp_x'\mathbf{a}_{x+1}' = 1 + p_x' \frac{1}{1+\chi} \frac{1}{p_x} a_x$$

$$1 + \chi \frac{p_x'}{p_x} a_x = \mathbf{a}$$

$$p_x' = p_x\left(1 - \frac{\chi}{a_x}\right),$$

wo bekanntlich $a_x = \mathbf{a}_x - 1$ ist. Ist $\chi > 0$, so ist $p_x' < p_x$; ist $\chi < 0$, so ist $p_x' > p_x$. Ist x positiv, so nimmt $1 - \frac{\chi}{a_x}$ mit dem Zunehmen von χ ab, die Wahrscheinlichkeiten p' verkleinern sich rascher als die Wahrscheinlichkeiten p; ist χ negativ, so verkleinern sich die p' langsamer als die p.

Mit der obigen Gleichung ist jedenfalls ein Gesetz definiert, nach welchem eine Vermehrung (bzw. eine Verminderung) der Überlebenswahrscheinlichkeiten aller Alter auf die Reserven nicht einwirkt.

29. Eine Untersuchung über den Einfluß der Sterbetafel und des Zinsfußes auf den finanziellen Bestand eines Versicherungsstockes wird notwendig, wenn es sich um die „Konvertierung" desselben, d. h. um den Übergang zu neuen Rechnungsgrundlagen handelt.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß der Übergang zu einem niedrigeren Zinsfuße immer eine Erhöhung der Reserve erfordert. Kleinen Änderungen des Zinsfußes entsprechen gewöhnlich ziemlich große Änderungen der Reserven und der Prämien; deswegen ist die Betrachtung der zeitlichen Änderungen des Zinsfußes, insbesondere der sich so ziemlich überall geltend machenden Verminderung desselben[1]), für den Versicherungsmathematiker so wichtig.

Der Einfluß einer Veränderung der Sterbeverhältnisse läßt sich, wie wir gesehen haben, nicht allgemein charakterisieren,

1) Vgl. Seite 306.

auch wenn es sich um den Übergang zu durchweg günstigeren bzw. zu durchweg schlechteren Sterbeverhältnissen handelt. Insbesondere wird man in jedem einzelnen Falle zu untersuchen haben, wie die Einführung von Tafeln mit doppeltem Eingang auf die Reserven einwirkt.[1])

Um die vorhandene Prämienreserve auf die den neuen Grundlagen entsprechende Höhe zu bringen, wird man entweder etwaige angesammelte Sicherheitsfonds heranziehen, oder einen Teil der Zuschläge auf die künftigen Prämien verwenden.[2])

§ 9. Rückkaufswert. Reduktion und Umwandlung von Polizen.

30. Kann der Versicherte Anspruch auf die Reserve seiner Versicherung erheben? Die Frage ist zwar rein juristisch, aber durch die Beantwortung der technischen Frage bedingt: Welcher Teil der Reserve kann dem einzelnen Versicherten zuerkannt werden, falls er sein Versicherungsverhältnis vollständig auflösen oder die Prämienzahlung einstellen oder reduzieren will, ohne daß ein Schaden für den Versicherer aus der Zuerkennung entsteht?

Nicht die volle Reserve! Das entgegengesetzte Kriterium würde dahin führen, die Versicherung als ein Spiel aufzufassen, das nur einen der Spieler (den Versicherer), nicht dagegen den anderen (den Versicherten) verpflichtet. Der Versicherte hätte also die Möglichkeit, immer da auf das Spiel zu verzichten, wo eine Veränderung in den Bedingungen des Risikos dieses ungünstiger für ihn und günstiger für den Versicherer machte.

Ein solcher Sachverhalt ist technisch nicht denkbar, wenn nicht eine Entschädigung für den Schaden besteht, welchen die Wahlfreiheit des Versicherten dem Versicherer verursacht. Wir werden als Antiselektion diejenige Selektion bezeichnen, deren

1) Nach den Untersuchungen von *King* und *Sprague* (Journal of the Institute of Actuaries, 1877, 1879, 1881) ergibt z. B. das Material der 20 englischen Gesellschaften bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämie überwiegend höhere Reserven, wenn man die Sterblichkeit nach der Versicherungsdauer unterscheidet.

2) Vgl. z. B. *Ziegel, Eine Methode des Wechsels der Sterbetafel* usf. in Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft IV.

Wirkung die Wirkung solcher Veränderungen völlig oder teilweise neutralisiert, die dem Versicherer günstig sind. Es ist nun einleuchtend, daß während die Wirkung der Selektion keine strenge Schätzung zuläßt, und während sie für die Todesfallversicherungen innerhalb sehr enger Grenzen bleiben soll, sie im Falle von Erlebensversicherungen die Folge haben würde, alle oder fast alle diejenigen Individuen von der Versicherung loszureißen, deren Gesundheitszustand sich verschlechtert hat. Es würden also nur diejenigen übrig bleiben, für welche eine sehr große Wahrscheinlichkeit besteht, die versicherte Summe zu erhalten.

Der Praktiker hat daraus die Folgerung gezogen, keine Abfindung (keinen *Rückkaufswert*) dafür zu zahlen, daß der Versicherte seine Prämienzahlung einstellt und auf die ausbedungenen Versicherungsleistungen verzichtet, falls es sich um Erlebensversicherungen handelt.[1])

Es bezeichne $(1+\alpha_1)P$ die Reserveprämie (vgl. S. 283), V_m die Reserve, G_m den Gewinnanteil (vgl. S. 308), R_m den Rückkaufswert. Es sei also

$$R_m < V_m + G_m - \alpha_1 P \cdot \mathbf{a}_m .$$

Man kann setzen:

$$R_m = V_m + G_m - \alpha_2 P \cdot \mathbf{a}_m , \tag{15}$$

wo $\alpha_2 > \alpha_1$ einen willkürlich gewählten Koeffizienten bezeichnet. In dem Falle, wo alle Prämien gezahlt worden sind, würde Gleichung (15) liefern:

$$R_m = V_m + G_m .$$

Dies vermeidet man, indem man festsetzt, der Rückkaufswert soll in keinem Falle einen gewissen Bruchteil von V_m bzw. von $V_m + G_m$ überschreiten. Sehr oft kommt es bei den Todesfallversicherungen vor, daß die von dem Versicherer gezahlten Abschlußprovisionen größer sind, als $V_m + G_m$; der Rückkaufswert wäre also negativ. Dafür wird die Maßnahme getroffen, daß erst, nachdem 3 oder 5 Prämien gezahlt worden sind, die Zahlung einer Abfindung überhaupt stattfindet und daß auch in den späteren Versicherungsjahren die Differenz $V_m + G_m - R_m$ bedeutend größer als $\alpha_1 \cdot P \cdot \mathbf{a}_m$ ist. Oft wird auch als Rückkaufswert eine

1) Für die gemischten Versicherungen und die Erlebensversicherungen mit Prämienrückgewähr wird ein Rückkaufswert nur gezahlt, soweit sie Todesfallversicherungen sind.

feste Quote (drei Viertel) der Reserve geleistet. Es handelt sich um ein empirisches Kriterium, das den Vorzug großer Einfachheit besitzt. Es hat aber den Nachteil, daß, je länger die Polize aufrecht erhalten worden ist, relativ um so weniger geleistet wird. „Es wäre schwer", bemerkt *Landré*, „eine schlechtere Regel ausfindig zu machen."

31. Mit dem Rückkaufswert ist auch der Betrag bzw. die Dauer der *reduzierten* Polize bestimmt, welche prämienfrei und statt der baren Zahlung des Rückkaufswertes ausgestellt wird.

Die Reduktion findet auch für Erlebensversicherungen statt. Es handelt sich um eine Erleichterung, die sich als praktisch möglich erwiesen hat; es wäre aber schwer, sie „*a priori*" zu rechtfertigen.

Ist W_m die reduzierte Versicherungssumme für das Alter $x + m$ des im Alter x eingetretenen Versicherten, P die Nettoprämie, die der Versicherte zahlt, P_m die Nettoprämie, die derselben Versicherung und dem Alter $x+m$ entspricht, und S der ursprüngliche Betrag der Versicherung, so wird W_m durch die Gleichung bestimmt:

$$W_m = S\left(1 - \frac{P}{P_{(m)}}\right).$$

Bei der Ableitung der Formel wird vorausgesetzt, daß sich die einmalige Prämie A durch eine Gleichung von der Form

$$A = 1 - d \cdot \mathbf{a}$$

definieren läßt. Die Reserve nach m Jahren ist dann

$${}_mV = 1 - \frac{\mathbf{a}_m}{\mathbf{a}}$$

und

$$W_m = \left(1 - \frac{\mathbf{a}_m}{\mathbf{a}}\right)\frac{1}{1 - d \cdot \mathbf{a}_{(m)}} .$$

Setzt man

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}} - d \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{a} = \frac{1}{P+d}$$

$$P_m = \frac{1}{\mathbf{a}_m} - d \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{a}_m = \frac{1}{P_m + d},$$

so folgt für $S = 1$

$$W_m = \left(1 - \frac{P+d}{P_m+d}\right)\frac{1}{1 + \frac{d}{P_m+d}} = \frac{P_m - P}{P_m + P}\,\frac{P_m + P}{P_m}$$

$$= 1 - \frac{P}{P_m}.$$

Es ist indessen nicht unbillig, daß der Versicherer zur Bestimmung von W_m nicht einen Nettoprämientarif benutzt, sondern Prämien $(1+\alpha_3)P$ zugrunde legt, die zwischen den Netto- und den Bruttoprämien enthalten sind. Dies hat zur Folge, die ersten Unkosten in Wegfall zu bringen und einen Teil des Gewinns zu ersetzen, welchen die Zuschläge auf die noch zu erwartenden Prämien eingebracht hätten.

Ist also $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2$, so bestimmt man W_m auf Grund der Gleichung

$$W_m = \frac{V_m - \alpha_3 P \cdot \mathbf{a}_m}{A_m} \cdot S$$

die für

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}} - d$$

zu

$$W_m = \left(1 - (1+\alpha_3)\frac{P}{P_m}\right) \cdot S$$

wird. Ist n die Dauer der Versicherung, so wird normalerweise

$$W_m = \frac{m}{n} S$$

angenommen. Handelt es sich um Erlebensversicherung, so ist das Kriterium, das für kleine Werte von m dem Versicherten etwas ungünstig ist, immer anwendbar. Handelt es sich dagegen um gemischte Versicherung, so wird man es für die höheren Altersstufen nicht ohne vorherige Nachprüfung anwenden.

32. Unter *Umwandlung* einer Versicherung versteht man den Übergang zu einer anderen Versicherung, deren Betrag oder deren Form von der ersten abweicht, oder welcher ein neuer Modus der Prämienzahlung entspricht.

Man hat dann die Summe aus der vorhandenen Prämienreserve[1]) und dem wahrscheinlichen Werte der künftigen Prämien dem auf diese Zeit bezogenen Wert der abgeänderten Versicherung gleichzusetzen: aus der Gleichung läßt sich entweder die neue gleichbleibende Prämie oder die umgewandelte Versicherungssumme bestimmen.

Behalten also die sogleich einzuführenden Symbole die Bedeutung der vorigen Nummer, und ist P'_m die neue Prämie, S' der

1) Oder aus der Prämienreserve vermindert um gewisse festzusetzende Umwandlungsgebühren.

Betrag der neuen Versicherung A'_m, so hat man

$$S \cdot {}_mV + \mathfrak{a}_m \cdot P'_m = S' \cdot A'_m.$$

Wird z. B. nur der Betrag geändert, ist also $A'_m = A_m$, so erhält man, indem man

$${}_mV = A_m - P \cdot \mathfrak{a}_m$$

einsetzt:

$$P'_m = (S' - S) P_m + S \cdot P,$$

eine Formel, die keiner Begründung bedarf.

Kapitel II.

Die Gewinne.

§ 1. Die Gewinn- und Verlustrechnung.

1. Es sei für eine bestimmte Versicherungsunternehmung und ein bestimmtes Geschäftsjahr die Differenz gebildet:

a) zwischen der Summe der Reserven am Anfang des Geschäftsjahres, der während des Jahres eingezahlten Prämien und der auf die angesammelten Reservefonds eingenommenen Zinsen und der Summe der im Jahre ausgezahlten versicherten Kapitalien (Kapitalien im engeren Sinne und Renten), der allgemeinen Ausgaben, der den Agenten gezahlten Provisionen und der Reserven am Ende des Jahres

einerseits, und die Differenz:

b) zwischen der Summe der Reserven am Anfang des Jahres, der einkassierten Nettoprämien und der Zinsen auf die Reserven und der Summe der im Jahre ausgezahlten Versicherungssummen und der Reserven am Ende des Jahres

andererseits. Wir nennen

b) eine *Nettogewinn- und Verlustrechnung,*

a) eine *Gewinn- und Verlustrechnung*

überhaupt.

Das Saldo der Rechnung a) bzw. der Rechnung b) stellt den Gewinn bzw. den Verlust dar (je nachdem das Saldo $\gtrless 0$ ist), den der Versicherer im Geschäftsjahre gehabt hat, wie auch ein solcher Gewinn oder Verlust entstanden sein mag (Rechnung a), oder den Gewinn bzw. den Verlust, der bloß aus der Minder- oder Mehrsterblichkeit der Versicherten während des Jahres und aus

dem Überschuß der wirklich eingebrachten über die rechnungsmäßigen Zinsen entstanden ist (Rechnung b).

Als Prämien des Jahres sind die Prämien zu betrachten, welche im Jahre fällig geworden sind; auch die gestundeten Prämien sollen also unter den Prämieneinnahmen erscheinen.

Es ist klar, daß einem positiven Saldo der Rechnung a) sehr wohl ein negatives Saldo der Rechnung b) entsprechen kann, und umgekehrt.

2. Rechnung a) gibt den gesamten (positiven oder negativen) Gewinn der Versicherungsunternehmung in dem Geschäftsjahre an, auf welches sie sich bezieht.

Die Betrachtung ihrer Elemente liefert eine Zergliederung des Gewinnes nach seinen Entstehungsquellen. So können wir unterscheiden:

a) einen *Sterblichkeitsgewinn;*
b) einen *Zinsgewinn;*
c) einen *Gewinn aus Zuschlägen;*
d) einen *Gewinn aus Rückkauf und Verfall,* der durch die Differenz der zur Zeit des Rückkaufs bzw. des Verfalls vorhandenen Prämienreserve und des gewährten Rückkaufswertes gegeben wird;
e) einen *Gewinn aus sonstigen Gewinnquellen.* Insbesondere spielen hier eine Rolle die Gewinne und Verluste aus Vermögensanlagen und die Schwankungen im Bestande der Sicherheits- und Extrafonds.

3. Die Aufstellung einer möglichst genauen Gewinn- und Verlustrechnung hat eine einleuchtende praktische Bedeutung. Aus ihr ergibt sich eine periodische Nachprüfung der Zulässigkeit der angenommenen Rechnungsgrundlagen und der Beweis der eventl. Zweckmäßigkeit von Änderungen in denselben. Auch liefert die Betrachtung der verschiedenen Gewinnquellen die Grundlage für die Verteilung der Gewinne oder eines Teils der Gewinne unter die Versicherten, wo diese stattfindet. Die Aufgabe, den Gewinn auf die einzelnen Polizen zu verteilen, läßt sich in der Tat nur dadurch lösen, daß man die Entstehung des Gewinnes möglichst genau in Betracht zieht. Es ist deswegen wichtig, daß man nicht nur den verschiedenen Geschäftszweigen verschiedene Gewinn- und Verlustrechnungen entsprechen läßt, sondern daß man auch die einzelnen Versicherungsformen getrennt behandelt. Nach den Vorschriften des deutschen Aufsichtsamtes

für Privatversicherung vom 2. Juni 1902 soll z. B. der Sterblichkeitsgewinn für Versicherungen auf den Todesfall sowie für Kapitalversicherungen auf den Erlebensfall und Leibrenten getrennt angegeben werden.

§ 2. **Der Sterblichkeitsgewinn.**

4. Den Sterblichkeitsgewinn kann man nach zwei theoretisch begründeten Methoden ermitteln, die *Bohlmann Netto-Gewinn- und Verlustrechnungsmethode und statistische Methode* nennt[1]), und die sich beide auf einzelne Leben anwenden lassen. Die erste Methode ist der zweiten theoretisch überlegen und hat den Vorteil, unmittelbar auf Versicherungen auf verbundene Leben angewandt werden zu können; trotzdem wird die statistische Methode in der Praxis bevorzugt, sei es, weil sie weniger empfindlich und infolge dessen größeren Fehlern weniger ausgesetzt ist als die erste, sei es, weil sie die Kenntnis der Nettoprämieneinnahme des Geschäftsjahres nicht erfordert.

Um den Sterblichkeitsgewinn durch die Netto-Gewinn- und Verlustrechnung zu ermitteln, trägt man in dieselbe als Einnahme nicht die wirklich auf die Fonds eingebrachten Zinsen ein, sondern die rechnungsmäßigen Zinsen. Der Sterblichkeitsgewinn wird also schematisch durch die Rechnung definiert:

A. *Nettoeinnahmen*	Betrag	B. *Nettoausgaben*	Betrag
1. Prämienreserve zu Anfang des Geschäftsjahres	V_0	1. Im Geschäftsjahre fällige Versicherungsbeträge:	
		a) zahlbar im Todesfall	s
		b) zahlbar im Erlebensfall	σ
2. Nettoprämien fällig im Geschäftsjahre	P	2. Nettoprämienreserve der vorzeitig aufgelösten Polizen	V_m
3. Rechnungsmäßige Zinsen	J	3. Prämienreserve zu Ende des Geschäftsjahres	V_1
Nettoeinnahmen: Summa	A	Nettoausgaben: Summa	B

$$\text{Sterblichkeitsgewinn} = C = A - B .$$

Die Prämienreserve am Anfang und am Ende des Geschäftsjahres

1) *Die Berechnung des Sterblichkeitsgewinns bei einer Lebensversicherungsgesellschaft* in Veröff. des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft IV, Berlin 1905.

ist die Nettoprämienreserve, die *Bohlmann* „mathematisch" nennt, d. h. die aus dem arithmetischen Mittel der Reserven zu Ende des laufenden und des vorhergehenden Versicherungsjahres (der „kaufmännischen" Prämienreserve) und aus der halben Prämieneinnahme für das laufende Versicherungsjahr bestehende Prämienreserve.

Unter „Nettoprämien fällig im Geschäftsjahre" ist zu verstehen die Summe:
der Nettojahresprämien des Geschäftsjahres, die auf den Versicherungsbestand zu Ende desselben entfallen,
der einmaligen Nettoprämien der im Jahre neu abgeschlossenen Versicherungen mit einmaliger Prämie,
der Nettojahresprämien der Polizen, bei denen der Tod nach dem Anfang des neuen Versicherungsjahres im Geschäftsjahre eintrat.

Die rechnungsmäßigen Zinsen J sind
die Zinsen von V_0 für ein volles Jahr,
die Zinsen von $(P - \sigma - V_m)$ für ein halbes Jahr.

Was man unter V_m in der Rechnung zu verstehen hat, ist von selbst klar. Was die Zinsen der Summe s anlangt, so ist folgendes zu bemerken. Man berechnet die Prämien auf Grund der Annahme, daß man die Todesfallversicherungen am Ende des Sterbejahres auszahlt; tatsächlich bezahlt man sie gewöhnlich kurz nach dem Tode, wodurch für die Gesellschaft ein Verlust an Zinsen für durchschnittlich ein halbes Jahr entsteht. Rechnet man diesen Verlust als Sterblichkeitsverlust (worin natürlich eine Willkür steckt: man könnte ihn ebensogut seiner Natur nach als Zinsverlust betrachten), so erreicht man, daß der Sterblichkeitsgewinn gleich Null wird, falls die erwartete und die tatsächliche Sterblichkeit zusammenfallen.

5. Es bedeute:
a^0 die erwartungsgemäß durch Tod fälligen Versicherungsbeträge,
a' die tatsächlich durch Tod fälligen Versicherungsbeträge,
b^0 die erwartungsgemäß durch Tod frei werdenden Prämienreserven,
b' die tatsächlich durch Tod frei gewordenen Prämienreserven.

$$c = (a^0 - b^0) - (a' - b')$$

definiert den Sterblichkeitsgewinn im Falle von Todesfallversicherungen. Handelt es sich um Versicherungen auf den Erlebensfall und um Leibrenten, so wird es im allgemeinen nicht möglich sein, den Sterblichkeitsgewinn zu ermitteln, weil die Todesfälle der Versicherten vom Versicherer nicht verfolgt werden können. Die Ermittelung ist dagegen möglich, wenn Prämienrückgewähr stattfindet.

Man hat für die Versicherungen auf den Erlebensfall, wenn c wiederum den Sterblichkeitsgewinn bezeichnet,

$$\begin{aligned} c &= (b' + c') - (b^0 + c^0) - (a' - a^0) \\ &= (b' - a' + c') - (b^0 - a^0 + c^0) \qquad (1) \end{aligned}$$

dabei bedeutet:
a^0 die erwartungsmäßig durch Tod fällig werdende Prämienrückgewähr,
a' die tatsächlich durch Tod fällig gewordene Prämienrückgewähr,
b^0 die erwartungsgemäß durch Tod frei werdende Prämienreserve,
b' die tatsächlich durch Tod frei gewordene Prämienreserve,
c^0 die erwartungsgemäß durch Tod frei werdende Versicherungssumme,
c' die tatsächlich durch Tod frei werdende Versicherungssumme.

Man hat in b' und b^0 die Reserve für die Prämienrückgewähr einzubegreifen. Handelt es sich endlich um Renten, so werden in (1) unter
c^0 die erwartungsgemäß durch Tod frei werdenden Rentenbeträge,
c' die tatsächlich durch Tod frei gewordenen Rentenbeträge
zu verstehen sein.

6. Die Methode der Netto-Gewinn- und Verlustrechnung bedarf keiner weiteren Erklärung. Ihr Grundgedanke ist von selbst klar.

Die Grundidee der von *Bohlmann* vorgeschlagenen statistischen Methode ist aber ebenfalls klar. Für Todesfallversicherungen sind $a^0 - b^0$ und $a' - b'$ die Beträge der durch die Reserven nicht gedeckten Versicherungssummen, wie sie zu erwarten waren, und wie sie am Ende des Geschäftsjahres tatsächlich sind; ihre Differenz identifiziert sich also mit dem Sterblichkeitsgewinn.

Handelt es sich um Erlebensversicherungen, so bezeichne $\sigma_x(R)$ die im Erlebensfall zahlbare Versicherungssumme unter Risiko der Altersklasse x; die Summation

$$c^0 = \sum q_x \sigma_x(R)\,^{1)}$$

erstreckt über alle Altersklassen definiert c^0, wenn

$$q_x,\quad q_{x+1},\ldots$$

die zugrunde gelegten Sterbenswahrscheinlichkeiten sind. Sind dagegen

$$q_x',\quad q_{x+1}',\ldots$$

die wirklich beobachteten Sterblichkeitskoeffizienten, so wird man haben:

$$c' = \sum q_x' \sigma_x(R),$$

wo die Summation wieder über alle Altersklassen zu erstrecken ist.

Ist

$$q_x' = q_x + \varepsilon_x,$$

so ist auch

$$c' - c = \sum \varepsilon_x \sigma_x(R) > 0,$$

wenn identisch in x

$$\varepsilon_x > 0$$

ist. Die Bedingung ist aber keineswegs notwendig.

Analoges gilt für die Reserven. Durch eine größere Sterblichkeit der Versicherten wird ein größerer Betrag von Reserven fällig, deren Versicherungen aufgelöst sind. Bezeichnet b' den Betrag der wirklich fällig gewordenen Reserven, b^0 den erwartungsmäßigen Betrag derselben, so ist

$$b' - b^0$$

der ihnen entsprechende Sterblichkeitsgewinn. Aus $c' - c^0$ und $b' - b$ setzt sich der gesamte Sterblichkeitsgewinn zusammen:

$$c = (c' - c^0) + b' - b^0) = (c' + b') - (b^0 + c^0).$$

Kommt die Betrachtung der Prämienrückgewähr hinzu, und behalten a^0 und a' die zuletzt angegebene Bedeutung, so sieht man unmittelbar, daß $a' - a^0$ zu subtrahieren ist: es ist ja a' bzw. a^0 die Summe, die man beim Tode des Versicherten tatsächlich bzw.

1) Man nimmt dabei an, daß die Versicherungen zu Ende des Jahres fällig werden. Trifft diese Annahme nicht zu, so kann man annehmen:

$$2\,T_x(R) = \sigma'(x) + \sigma''(x),$$

wo $\sigma'(R)$ bzw. $\sigma''(R)$ die zu Anfang bzw. zu Ende des Jahres entsprechenden Beträge bezeichnen.

erwartungsgemäß auszuzahlen hat. Der Rückgewähr wird ein Gewinn bzw. ein Verlust entsprechen, je nachdem $a' \lessgtr a^0$ ist.

Aus der Zerlegung der Nettoprämie der Integralversicherung (vgl. S. 277) in eine Risikoprämie

$$P_m' = vqR_m \quad \text{bzw.} \quad P_m' = vpR_m$$

(je nachdem

$$R_m = T_m - U_m - V_m \gtrless 0$$

ist) und in eine Spar- und eine Restprämie, die beide von den Sterbenswahrscheinlichkeiten unabhängig sind, folgt, daß der Sterblichkeitsgewinn direkt proportional zur Risikosumme R_m ist. Betrachten wir eine Todesfallversicherung oder eine gemischte Versicherung, die nicht im betrachteten Jahre fällig wird, so ist

$$R_m = 1 - V_m.$$

Der Sterblichkeitsgewinn ist, die Gleichheit der übrigen Elemente vorausgesetzt, desto größer, je kleiner die Reserve ist. Man hat also den kleinsten Sterblichkeitsgewinn im Falle einmaliger Prämien, und einen desto größeren Sterblichkeitsgewinn, je langsamer die Prämienzahlung erfolgt.

Das Umgekehrte findet für die Versicherungen auf den Erlebensfall statt. Es ist für sie

$$R_m = V_m\,^{1)}.$$

Der Sterblichkeitsgewinn ist am größten bei einmaliger Prämienzahlung, und desto kleiner, je rascher die Zahlung der Prämien stattfindet.

7. Behalten q_x und q_x' die vorher angegebene Bedeutung, und ist

$$q_x' = q_x + \varepsilon$$
$$p_x' = p_x - \varepsilon,$$

so hat der Sterblichkeitsgewinn den Betrag

$$-\varepsilon(1 - V_m)$$

bzw.

$$\varepsilon V_m,$$

je nachdem es sich um Versicherungen auf den Todes- oder auf

1) Das Jahr, wo sie fällig werden, ist auszuschließen. Es ist in ihm

$$V_m = 0,\quad U_m = R_m.$$

den Erlebensfall handelt. Ist $\varepsilon > 0$, so ist der Gewinn negativ für die ersteren Versicherungen, positiv für die zweiten.

Einer größeren Sterblichkeit, als die erwartete, entspricht also ein Verlust für den Versicherer für die Todesfallversicherungen, ein Gewinn für die Versicherungen auf den Erlebensfall (inkl. der Renten).

8. Aus der Aussage, daß für die Todesfallversicherungen der Sterblichkeitsgewinn direkt proportional zum reduzierten Kapital $1 - V_m$ ist, ergibt sich ein sehr bemerkenswertes Resultat.

Es werde eine auserlesene Gesamtheit vorausgesetzt, die aus L_x Versicherten im Altersintervall $(x, x+1)$ besteht, von denen

L_0 im ersten Versicherungsjahre
L_1 im zweiten Versicherungsjahre
. . . .

sind. Ist q_0 die Sterbenswahrscheinlichkeit eines Angehörigen der ersten Gruppe, q_1 die Sterbenswahrscheinlichkeit eines Angehörigen der zweiten Gruppe, und so fort, so ist auch, wegen der vorausgesetzten Auslese

$$q_0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_{r-1} \leq q_r \leqq \cdots.$$

Die Sterbenswahrscheinlichkeit eines Angehörigen der Gesamtgruppe L_x ist durch die Gleichung definiert:

$$q_x = q = \frac{L_0 q_0 + L_1 q_1 + L_2 q_2 + \cdots}{L_0 + L_1 + L_2 + \cdots},$$

so daß man schreiben kann:

$$L_0(q - q_0) + L_1(q - q_1) + \cdots = 0,$$

oder falls k der kleinste Wert von n ist, für welchen

$$q_n > q$$

ist, und man der Kürze halber

$$L_n(q - q_n) = \alpha_n$$
$$-\alpha_n = \alpha_n'$$

setzt,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} = \alpha_k' + \alpha_{k+1}' + \cdots.$$

Es ist aber auch, wenn man die reduzierten Kapitalien

$$R_0 = 1 - V_0, \quad R_1 = 1 - V_1, \quad R_2 = 1 - V_2, \ldots$$

einführt, und berücksichtigt, daß

$$1 - V_0 > 1 - V_1 > 1 - V_2 > \cdots$$

$$\alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 + \cdots \alpha_{k-1} R_{k-1} > \alpha_k' R_k + \alpha_{k+1}' \cdot R_{k+1} + \cdots,$$

wo das erste Glied den Gewinn ausdrückt, welcher den seit weniger als k Jahren abgeschlossenen Versicherungen entspricht, das zweite Glied dagegen den Verlust, der den seit k oder mehr als k Jahren abgeschlossenen Versicherungen entspricht.

Da die Summe

$$\alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 + \cdots + \alpha_k R_k + \cdots$$

offenbar positiv ist, so leitet man daraus ab, daß in dem Falle, wo der Zugang von Versicherten in den Altersstufen

$$x - n, \ldots, x - k, \ldots, x - 1, x$$

konstant bleibt und die zugrunde gelegte Sterbenswahrscheinlichkeit q_x der durchschnittlichen Sterblichkeit der Gruppe L_x entspricht, der Sterblichkeitsgewinn des Versicherers notwendig positiv ist. Einen Gewinn erzielt der Versicherer *„a fortiori“*, falls der Zugang von Versicherten zunimmt; der Versicherer erleidet dagegen einen Verlust (mindestens nach einer gewissen Zeit), wenn der Zugang von Versicherten abnimmt oder aufhört.

§ 3. **Der Zinsgewinn.**

9. Als Zinsgewinn definiert man den Überschuß der wirklich erzielten Zins- und Mietseinnahmen des Jahres über seine Zins- und Mietsausgaben, vermindert um die rechnungsmäßigen Zinsen eines Durchschnittwertes des Deckungskapitals für die noch bestehenden Versicherungen.

Es sei i der rechnungsmäßige, i' der wirklich erzielte Zinsfuß, und es bezeichne V_0 die am Anfang des Jahres vorhandene Prämienreserve, V_1 dieselbe Größe am Schluß des Jahres; der Annahme, daß die Eintritte und Einzahlungen, sowie die Austritte und Auszahlungen durchschnittlich in der Mitte des Jahres erfolgen, entspricht die durchschnittliche Höhe des Deckungskapitals im Jahre

$$V_0 + \tfrac{1}{2}(V_1 - V_0)$$

und infolgedessen der Zinsgewinn

$$(i' - i)\{V_0 + \tfrac{1}{2}(V_1 - V_0)\}.$$

Sind aber Extrafonds vorhanden, deren Höhe am Anfang und am Ende des Jahres bzw. durch F_0 und F_1 ausgedrückt wird, so wird man in erster Annäherung den Zinsgewinn gleich

$$\tfrac{1}{2}(i' - i)\{V_0 + V_1\} + \tfrac{1}{2}(F_0 + F_1)i$$

setzen. Es ist aber einleuchtend, daß sich der Zinsgewinn aus einer Gewinn- und Verlustrechnung ergibt, in welcher man alle übrigen Gewinne gleich Null angenommen hat. Ist S das Saldo einer solchen Rechnung, so wird man die Gleichungen

$$2S = (i' - i)(V_0 + V_1)$$

bzw.

$$2S = i(- V_0 - V_1 + F_0 + F_1) + i'(V_0 + V_1)$$

zur Bestimmung von i' verwenden.

10. Der Zinsfuß zeigt bei wirtschaftlich normalen Zuständen eine gewisse Tendenz zur Verminderung, die bald langsamer, bald rascher, aber fast ununterbrochen wirkt.[1])

Eine solche Tendenz zieht man in Erwägung, indem man

a) entweder bei der Bestimmung der Prämien und Reserven einen Zinsfuß wählt, der etwas kleiner ist als der Zinsfuß, den man zu der Zeit als normal betrachten kann, wo die Bestimmung stattfindet;

b) oder Prämien und Reserven auf Grund der Annahme bestimmt, daß der Zinsfuß eine (stetige oder unstetige) Funktion der Zeit ist.[2]) Praktisch angewandt wird nur das Kriterium a), das,

1) Schon *Gauß* hatte eine solche Tendenz berücksichtigt. In seinem Bericht über die „Göttingische Professoren-Witwenkasse" zieht er in Erwägung, „daß ganz unverkennbar der Zinsfuß in allen Ländern Europas, einzelner Fluktuationen ungeachtet, die Tendenz zu weiterem Herabsinken zeigt". Und er zitiert aus *Nebenius* (*Über die Herabsetzung der Zinsen der öffentlichen Schulden,* Stuttgart 1837, S. 129): „Das allmähliche weitere Sinken des Zinsfußes, welches bei längerer Fortdauer des Friedens nicht ausbleiben kann, wird zuletzt überall, hier etwas früher, dort etwas später, die Reduktion auf 3 Prozent herbeiführen" und (S. 21): „Einer Periode größerer Regsamkeit in produktiven Unternehmungen, die das Sinken des Zinsfußes eine Zeitlang aufhält, folgt um so gewisser ein rasches Sinken des Zinsfußes nach. (*C. F. Gauß Werke*, Bd. IV, S. 158). Das Zitat zeigt übrigens, daß die erwähnte Tendenz durchaus relativ ist: die jetzigen Zinssätze stimmen mit den damaligen ziemlich überein.

2) Man vergleiche über b): *Hardy, Australian Mutual Provident Society*, Journal of the Inst. of Actuaries, Vol. XXXI, S. 326, *G. H. R.,*

um die Wirkung zufälliger Schwankungen zu neutralisieren, auch im Falle der Konstanz des Zinsfußes berechtigt erscheinen würde.

11. Das Variieren des Zinsfußes hat aber auch eine Wirkung auf die Kapitalwerte der zinsbringenden Fonds, die hervorgehoben zu werden verdient. Die Kapitalwerte und die entsprechenden Zinssätze stehen nämlich in umgekehrtem Verhältnis, so daß einer Verminderung des Zinsfußes eine Vermehrung der Kapitalwerte entspricht, die desto größer ist, je kleiner der Zinsfuß selbst ist. (Ein Kapital, das die jährliche Rente 20 einbringt, hat den Wert 500 beim Zinsfuße 4 %, den Wert 571,43 beim Zinsfuße 3,5, den Wert 666,67 beim Zinsfuße 3 %...)

Ist eine solche Vermehrung als rein nominell oder als eigentlicher Mehrwert (also als Gewinn) zu betrachten? Die Frage wird praktisch verschiedentlich gelöst, je nach dem Vorsichtsgrade derjenigen, die sie stellen. Aber abgesehen davon, daß solche Veränderungen rein vorübergehend sein können, so daß den Mehrwerten Verluste folgen können, ist betreffs der Reserven die Bemerkung fundamental, daß diese bestimmten Beträgen in zukünftigen Zeitmomenten gleichkommen sollen. Es ist gleichgültig, daß der jetzige Wert eines Kapitals höher wird, wenn der Verzinsungsfaktor desselben entsprechend abnimmt.

§ 4. **Der Gewinn aus Zuschlägen.**

12. Der Gewinn aus Zuschlägen ist gegeben durch die Zuschläge auf die Prämien, vermindert um die Unkosten des Jahres. Man kann die Gewinne aus den Zuschlägen für erste Unkosten von den Gewinnen aus den Zuschlägen für dauernde Unkosten unterscheiden.

Sowohl zu den Gewinnen aus Zuschlägen, wie zu den Gewinnen aus sonstigen Quellen können die Aufschläge auf die Prämien hinzugerechnet werden, die man im Falle der Ratenzahlung der Prämien bestimmt.

The effect of a decreasing rate of Interest, Vol. XXXII, S. 272 und *Fackler*, *Proper charges for Ammities and Insurances,* in Papers and Transactions of the Actuarial Society of America, Vol. IV, SS. 32, 68, 201. Man vergleiche auch die Verhandlungen des vierten Versicherungskongresses.

§ 5. **Die Gewinnbeteiligung der Versicherten.**[1])

13. Der Überschuß einer Versicherungsunternehmung kann außer zur Bildung von Reserven und zur Zahlung von Dividenden und Tantiemen an Aktionäre und Verwalter dazu verwandt werden, den Versicherten Gewinnanteile zu gewähren. Indessen ist sowohl das Maß derselben, wie die Form der Verteilung willkürlich.

Die Untersuchung der Verteilungsmethoden, welche praktische Verwendung finden, hat also vor allem den Zweck, festzustellen, welche Wirkung sie für die einzelnen Versicherten herbeiführen.

Es kann auch bemerkt werden, daß bei den auf dem Prinzip der Gegenseitigkeit beruhenden Unternehmungen, die Beteiligung der Versicherten an dem Gewinn eine notwenige Folge des Prinzips ist, da die Gesamtheit der Versicherten sich mit dem Versicherungsunternehmer, d. h. mit dem Versicherer identifiziert. Der daraus entstehende Unterschied zwischen den Gegenseitigkeitsgesellschaften und den Aktiengesellschaften ist aber im Laufe der Zeit durch zwei verschiedene Umstände teilweise verwischt worden. Denn einerseits haben die Gegenseitigkeitsgesellschaften die Nachschußpflicht der Versicherten im Falle von Verlusten der Unternehmung begrenzt, andererseits findet die Gewinnbeteiligung der Versicherten auch bei den meisten Aktiengesellschaften statt. Allerdings wird bei diesen nur ein Teil des Reingewinns an die Versicherten überwiesen, und öfters wird auch die Verteilung auf die Versicherungsformen beschränkt, die für den Versicherer besonders vorteilhaft sind (Todesfallversicherungen), oder auf die Versicherten, welche eine besondere Extraprämie dafür zahlen (Gewinnverbände).

14. Betreffs der Gewinnverteilung werden die Versicherten in Gruppen geteilt, denen besondere Gewinnanteile entsprechen. Für jede Gruppe gewinnberechtigter Versicherter wird eine Gewinn- und Verlustrechnung aufgestellt, deren Elemente die Prämieneinnahme, die Reserven, die Ausgaben für Schäden, die Abschluß- und Inkassoprovisionen, die den Versicherungen der

1) Vgl. *Die Gewinnbeteiligung der Versicherten bei den im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensversicherungsgesellschaften.* (K. Aufsichtsamt für Privatversicherung.) Veröff. des D. Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft X, Berlin 1906.

Gruppe entsprechen, und eine nach einem festgesetzten Prinzip bestimmte Quote der allgemeinen Verwaltungskosten und der Kapitalgewinne (event. Verluste) sind.

15. Hat man den gesamten Gewinnanteil aller Versicherten oder einer bestimmten Gruppe von Versicherten ermittelt, so entsteht die weitere Frage, wie die Verteilung an die einzelnen Versicherten erfolgen soll.

Vor allem, welches Verteilungsprinzip man zu wählen hat. Es kommen insbesondere in Betracht:

a) die Verteilung nach dem Verhältnis der Versicherungssumme,
b) die Verteilung nach dem Verhältnis der Jahresprämie,
c) die Verteilung nach einem für jede Versicherung mit der Versicherungsdauer steigenden Maßstabe, wofür man wählen kann:
   c_1) die Prämienreserve,
   c_2) die Summe der für die einzelne Versicherung im ganzen gezahlten Jahresprämien,
d) die Verteilung nach einem gemischten Systeme (dem sogenannten Kontributionssysteme).

a) ist ein durchaus rohes Verteilungskriterium, das überhaupt keine Anwendung mehr findet; eine Kritik von b), c_1) und c_2) liefern wir indirekt, indem wir den Grundgedanken von d) wiedergeben.

Diesem, d. h. dem Kontributionssysteme, liegt das Bestreben zugrunde, den Gewinnanteil jeder Gruppe von Versicherten und jedes Versicherten möglichst genau nach der Bedeutung des Wirkens der einzelnen Gewinnquellen zu bestimmen. Es kommen besonders in Betracht:

1. der Zinsgewinn,
2. der Sterblichkeitsgewinn,
3. der Gewinn aus Zuschlägen;

die übrigen Gewinne betrachtet man als nebensächlich und verteilt sie, ohne sie vereinzelt zu analysieren. Den Anteil der einzelnen Versicherung definiert man durch die Summe der aus 1., 2. und 3. sich ergebenden Gewinnanteile, indem man z. B. den Zinsgewinn im Verhältnis der Prämienreserve, den Gewinn aus Zuschlägen im Verhältnis der Prämie (oder besser, nach einem Kriterium, das die wirkliche Höhe des Zuschlags direkt in Betracht zieht, den Sterblichkeitsgewinn nach der Risikosumme

(d. h. nach der Differenz zwischen den versicherten Summen und den vorhandenen Reserven) verteilt.

Damit ist implicite eine Kritik nicht nur von b), das auf die Entstehung der Gewinne so gut wie keine Rücksicht nimmt, sondern auch von c_1) und c_2) gegeben. c_1) wird anzuwenden sein, falls der Zinsgewinn die vorzugsweise in Betracht kommende Gewinnquelle ist. Spielt neben dieser der Gewinn aus Zuschlägen eine nicht zu vernachlässigende Rolle, so erscheint eine Verbindung von c_1) und c_2) angebracht. Sie genügt aber nur, soweit der Sterblichkeitsgewinn relativ klein ist. Die Gewinnverteilung nach einem steigenden Maßstabe hat jedenfalls den Vorteil, daß bei ihr die Versicherten ihre Versicherungen weniger leicht aufgeben, als sie sonst vielleicht tun würden. Diesem Vorteil steht die Gefahr gegenüber, daß die Kleinheit der anfänglichen Dividenden leicht dazu führen kann, allzu hohe Verteilungssätze zu bestimmen, aus welchen sich später Schwierigkeiten für den Versicherer ergeben können.

Hat man nach irgendeinem Verteilungsprinzip den Gewinnanteil jedes einzelnen Versicherten bestimmt, so entsteht die weitere Frage, wie dieser zu gewähren ist.

Entweder kann man die Dividenden sofort zugunsten des Versicherten verrechnen, oder man kann sie den Versicherten erst nach Ablauf einer gewissen Ansammlungsperiode gewähren. Die erste Methode kann man am einfachsten befolgen, indem man jedem Versicherten den jährlichen Dividendenanspruch auf sein Konto gutschreibt und ihm die gutgeschriebenen mit einem festgesetzten Zinsfuße verzinsten Dividenden zu jeder Zeit auf seine Forderung auszahlt. Manchmal erfolgt die Auszahlung erst nach Ablauf einer gewissen Frist unter der Bedingung, daß die Versicherung alsdann noch in Kraft ist; in diesem Fall ist der Anspruch des Versicherten zwar bedingt, aber die Höhe des Anspruchs selbst ist genau festgesetzt.

Mit dieser Methode stimmen im wesentlichen überein die anderen, nach welchen die jährlichen Dividenden von den Prämien abgezogen werden, oder als einmalige Prämien von Versicherungen gelten, deren Form und deren Verfallzeit mit denjenigen der Hauptversicherung identisch ist, oder angesammelt und in dem Falle ausgezahlt werden, wo der Versicherte einen gewissen Termin erlebt.

16. Das Charakteristische aller dieser Systeme besteht darin, daß die Höhe der Dividenden jährlich und endgültig bestimmt wird. Nach dem Tontinen- oder Vererbungssystem werden dagegen geschlossene Gruppen aus allen solchen Versicherungen gebildet, welche in demselben Geschäftsjahr Anspruch auf die Dividende erlangen, und wird der gesamte auf die Gruppe entfallende Anteil nebst seinen Zinsen nach Ablauf einer Periode (der Tontinenperiode) denjenigen Mitgliedern der Gruppe ausgezahlt, die alsdann noch versichert sind. Diese Periode beträgt gewöhnlich 5—20 Jahre. Bei der ursprünglichen Form der Tontinenverteilung hatte der von der Tontinenperiode Ausscheidende weder auf die Dividenden noch auf irgendeinen Rückkaufswert Anspruch; dieser letztere wird dagegen jetzt allgemein gewährt. Die Gewinnquote jedes Versicherten ist nach Ablauf der Tontinenperiode durch den ursprünglichen Gewinnanteil der Gruppe und den Abgang durch Tod und durch Ausscheiden erst dann bestimmt, wenn ein Prinzip für die Verteilung der angesammelten Dividenden auf die übrigbleibenden Versicherten gegeben ist. Der Anteil der einzelnen Versicherung an dem Gewinn der einzelnen Versicherung wird entweder nach dem Verhältnisse der für Rechnung der einzelnen Versicherung vorhandenen Gewinnansammlung oder nach anderen Maßstäben ermittelt, welche auf das Alter des Versicherten Rücksicht nehmen.

Die Bezeichnung „Tontinenverteilung" rührt von einer im wesentlichen damit identischen Finanzoperation her, die von dem neapolitanischen Arzte *Lorenzo Tonti* vorgeschlagen wurde (17. Jahrhundert) und zuerst von italienischen und deutschen Städten, später (1686, 1696, 1706 und fünfmal in der Periode 1731—1759) mit unsicherem Erfolg von der französischen und der englischen Regierung versucht wurde. Die Tontine bestand darin, daß eine Anzahl von Personen durch Einzahlung bestimmter Summen einen Fonds schufen, dessen Zinsen an die Überlebenden verteilt wurden. Wenn die Gruppe völlig verstorben war, verfiel der Fonds dem Staate.[1])

1) Tontinenartige Anstalten bestehen noch in Frankreich und Italien. Die einzige italienische Anstalt hat Anlaß zu einer mathematisch interessanten Arbeit *Peanos* gegeben, welche die technische Verteidigung derselben bezweckt. (*Studio delle Basi sociali della Cassa Nazionale Mutua Cooperativa per le pensioni* per *G. Peano,* Torino 1901.)

Neben der Verteilung nach dem reinen Tontinenschema finden andere gemilderte Systeme Anwendung, die eine gewisse Ausgleichung der Gewinne der einzelnen geschlossenen Gruppen bezwecken. Es ist in der Tat eine bedenkliche Folge des Tontinensystems, daß die Gewinne der einzelnen Gruppen wegen der zufälligen Schwankungen in der Sterblichkeit ihrer Versicherten sehr verschieden ausfallen können. Diesem Umstande hilft man z. B. ab, indem man alle Versicherungen an dem Gesamtergebnis aus der Sterblichkeit und dem Stornoverlaufe teilnehmen läßt. In diesem Falle hat die Bildung gesonderter Gruppen keinen weiteren Zweck, als die Kontrolle zu erleichtern.

Vierter Abschnitt.

Die Theorie des Risikos.

§ 1. Die Definitionen und die fundamentalen Prinzipien der Theorie des Risikos.

1. Es seien $p_1, p_2, \ldots p_n$ die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens der Ereignisse (1), (2) ... (n), und es folge aus dem Eintreten von (i) ($i = 1, 2, \ldots n$) für den Spieler (α) die Pflicht, dem anderen Spieler (β) die Summe A_i zu zahlen, und für den zweiten Spieler (β) die Leistung E_i zugunsten von (α).

Schließen sich die Ereignisse (1), (2) ... (n) gegenseitig aus, und soll eines und nur eines von den Ereignissen eintreten — d. h. ist

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1,$$

so haben wir

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i A_i = A \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i E_i = E \qquad (2)$$

als die wahrscheinlichen Werte der Hoffnungen — oder als die mathematischen Hoffnungen von (β) bzw. von (α) definiert.

Ferner haben wir ein Spiel „gerecht" genannt, falls die Bedingung besteht:

$$A - E = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (A_i - E_i) = 0 \qquad (3)$$

(vgl. S. 23).

Zerlegen wir nun die Summe

$$\sum_{i=1}^{i=n} (A_i - E_i) p_i$$

in zwei andere, von denen die erste auf alle Werte von i ausgedehnt wird, für welche $A_i - E_i > 0$ ist, die zweite auf die Werte von i, für welche $A_i - E_i < 0$, und nehmen wir an, es gelte (3)

$$\sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i) + \sum_{A_i < E_i} p_i(A_i - E_i) = 0\,,$$

so haben wir

$$\sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i) = -\sum_{A_i < E_i} p_i(A_i - E_i)$$

und, falls wir die absoluten Beträge $|A_i - E_i|$ der Differenzen $A_i - E_i$ berücksichtigen, und

$$D = \sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i) = \sum_{A_i < E_i} p_i(E_i - A_i)$$

setzen,

$$D = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} p_i|A_i - E_i|\,. \qquad (4)$$

Die durch die Gleichung (4) definierte Größe D nennt man das *mathematische Risiko* des betrachteten Spieles. Allgemein sind

$$D_1 = \sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i)$$

$$D_2 = \sum_{E_i > A_i} p_i(E_i - A_i)$$

die Werte der vom zweiten bzw. vom ersten Spieler erhofften Gewinne: wir nennen sie das *mathematische Risiko von* (α) *dem* (β) *gegenüber*, bzw. das *mathematische Risiko von* (β) *dem* (α) *gegenüber*. Sie stimmen mit D überein, falls (3) gilt.

2. Ferner bezeichnen wir die größte unter den Differenzen $A_i - E_i$ als das *maximale Risiko des ersten Spielers dem zweiten Spieler gegenüber*, die größte unter den Differenzen $E_i - A_i$, $(E_i > A_i)$, als das *maximale Risiko des zweiten Spielers dem ersten gegenüber*,

$$M = +\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} p_i(A_i - E_i)^2}$$

als das *mittlere Risiko* der betrachteten Operation.

3. Es ist nun einleuchtend, daß (falls alle Spiele gerecht sind)

$$D = \sum_{A_i > E_i} p_i(A_i - E_i)$$

als der Beitrag betrachtet werden kann, den (α) einem dritten Spieler (γ) zu zahlen hat, damit dieser den etwaigen Verlust von (α) in dem Falle trägt, daß ein Ereignis (i) eintritt, für welches $A_i > E_i$ ist. Ebenso stellt

$$D' = \sum_{A_i > E_i + D} p_i(A_i - E_i - D)$$

den Einsatz dar, den (γ) seinerseits einem vierten Spieler (δ) zahlen muß, um gegen den etwaigen Verlust geschützt zu sein, welcher für ihn im Falle des Eintretens eines Ereignisses (i), für welches

$$A_i > E_i + D$$

entstehen würde.

Und so weiter; $D, D', D'' \ldots$ nennt man bzw. die mathematischen Risiken der nullten, ersten, zweiten Ordnung.

Es ist leicht zu beweisen, daß sie eine unendliche Reihe von positiven Gliedern bilden, die immer konvergiert, und deren Summenwert das maximale Risiko von (α) dem (β) gegenüber ist.

Daß zunächst keine der Größen $D, D', D'' \ldots$ negativ sein kann, besagt ihre Definition. Es soll weiter gezeigt werden, daß, falls man mit $D^{(r)}$ das allgemeine Glied der Reihe bezeichnet, es für keinen endlichen Wert von r

$$D^{(r)} = 0$$

sein kann. Der Beweis dafür, daß

$$D > D' > D'' > \cdots > 0$$

ist, ist offenbar erbracht, falls man den anderen liefert, daß $D^{(r)} > 0$ ist, falls $D^{(r-1)} > 0$[1]), d. h. falls man die Existenz mindestens eines Wertes $A_i = E_i$ nachweist, für welchen die Ungleichung gilt:

$$A_i - E_i - (D + D' + D'' + \cdots + D^{(r-1)}) > 0\,. \qquad (5)$$

Wir setzen der Kürze halber

$$S^{(r)} = D + D' + \cdots + D^{(r)}, \quad x_i = A_i - E_i$$

und bezeichnen mit x_μ die größte unter den Differenzen x_i.

Man erhält aus

$$D^{(r-1)} = \sum_{x_i > S^{(r-2)}} p_i(x_i - S^{(r-2)}),$$

---

1) In dieser Aussage ist die andere implicite enthalten:

$$D^{(r+1)} < D^{(r)} < D^{(r-1)}.$$

indem man jeden der Werte x_i durch x_μ ersetzt, und berücksichtigt, daß, falls nicht alle Differenzen $A_i - E_i$ positiv sind, die Summation

$$\sum_{(i)} p_i$$

erstreckt auf alle Werte p_i, denen Differenzen $x_i > S^{(r-2)}$ entsprechen, der Ungleichung

$$\sum_{(i)} p_i < 1$$

genügt:

$$(x_\mu - S^{(r-2)}) \sum_{x_i > S^{(r-2)}} p_i \geq D^{(r-1)}$$

$$x_\mu - S^{(r-2)} > D^{(r-1)},$$

woraus

$$x_\mu - S^{(r-2)} - D^{(r-1)} = x_\mu - S^{(r-1)} > 0$$

und die Ungleichung (5) folgen. Wird die Existenz anderer Werte $x_{\mu'}, x_{\mu''} \ldots$ angenommen, für welche (5) gilt, so hat man offenbar

$$p_\mu(x_\mu - S^{(r-1)}) + p_{\mu'}(x_{\mu'} - S^{(r-1)}) + \cdots$$
$$= \sum_{x_i > S^{(r-1)}} p_i(x_i - S^{(r-1)}) = D^{(r)} > 0.$$

Es ist also auch

$$S^{(r-1)} < S^{(r)} < S^{(r+1)} < \cdots < x_\mu,$$

also die Reihe

$$D,\ D',\ D'',\ \ldots$$

konvergent, und deswegen

$$\lim_{r=\infty} D^{(r)} = 0,$$

woraus

$$x_\mu - \lim_{r=\infty} S^{(r)} = 0$$

folgt. Die Aussage

$$A_\mu - E_\mu = D + D' + D'' + \cdots \text{ ad inf.} \tag{6}$$

ist also bewiesen. Die Betrachtung anderer Differenzen $x_i < x_\mu$ ist ohne weiteres ausgeschlossen; es wäre für sie

$$x_i = \lim_{r=\infty} S^{(r)} < 0.$$

4. Das Problem, das man sich gewöhnlich stellt, ist viel einfacher.

Es sei p die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, und es werden zwei Spieler (α) und (β) vorausgesetzt, von denen der erste dem zweiten gegen den Einsatz

$$E = pA$$

die Auszahlung A verspricht, falls das betrachtete Ereignis eintritt. Es ist dann

$$D_2 = qE, \quad \text{falls} \quad p = 1 - q$$

das mathematische Risiko von (α),

$$D_2 = p(A - E)$$

und gemäß der Gleichung (3)

$$D_1 = D_2 = D.$$

Ferner sind

$$D' = q^2 E, \quad D'' = q^3 E, \quad D''' = q^4 E, \ldots$$

die Risiken höherer Ordnung, und es ist

$$D + D' + D'' + \cdots \text{ ad inf.}$$
$$= E(q + q^2 + q^3 + \cdots \text{ ad inf.}) = E\frac{q}{p} = Aq. \tag{7}$$

In der Tat ist

$$A - E = Aq$$

das maximale Risiko von (α) gegenüber (β).

Die Gleichung (7) ist offenbar ein ganz spezieller Fall der Gleichung (6), die wir vorhin ableiteten. Sie entspricht der Annahme, daß

$$n = 2, \quad p_1 = p, \quad A_1 = A(1 - p), \quad E_1 = 0$$
$$p_2 = 1 - p, \quad A_2 = E_2 = 0.$$

5. Es sei $\varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler (α) einen Verlust x_i erleidet, welcher zwischen den Grenzen

$$x \pm \frac{dx}{2}$$

enthalten ist. Die Summen

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i = 0$$

sind dann durch die Integrale zu ersetzen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0$$

und es sind das mathematische Risiko D und das mittlere Risiko M definiert durch die Gleichungen

$$\int_0^{\infty} x\varphi(x)\,dx = D$$

$$\int_0^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx = M^2.$$

Ferner sind

$$\int_0^{\infty} (x - D)\varphi(x)\,dx = D'$$

$$\int_{D+D'}^{\infty} (x - D - D')\varphi(x)\,dx = D''$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

die mathematischen Risiken höherer Ordnung von (α).

Man hat offenbar wieder

$$D^{(r-1)} = \int_{S^{(r-2)}}^{\infty} (x - S^{(r-2)})\varphi(x)\,dx$$

$$\leq (x_\mu - S^{(r-2)}) \int_{S^{(r-2)}}^{\infty} \varphi(x)\,dx < x_\mu - S^{(r-2)}$$

und

$$D^{(r)} > 0 \quad \text{falls} \quad D^{(r-1)} > 0$$

$$\lim_{r=\infty} D^{(r)} = 0$$

$$\lim_{r=\infty} S^{(r)} = x_\mu.$$

Besonders interessant ist die Betrachtung des stetigen Wahrscheinlichkeitsgesetzes, welches durch die Gaußsche Funktion

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

definiert wird. Man findet mit Hilfe bekannter Relationen (vgl. S. 42):

$$D = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}$$

$$M = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

$$\frac{M}{D} = \text{konstant} = \sqrt{2\pi}. \tag{8}$$

6. Die Gleichung (8) wendet man häufig an, falls es sich darum handelt, das mathematische Risiko einer Gruppe von Versicherungen zu bestimmen, unter der Annahme, daß die Risiken der einzelnen Versicherungen bekannt sind. Es ist möglich, aus den mittleren einheitlichen Risiken

$$M_1,\ M_2,\ M_3, \ldots$$

der einzelnen Versicherungen (1), (2), (3) ... das mittlere Risiko M der Gruppe $\{1, 2, 3, \ldots\}$ zu berechnen; nur in besonderen Fällen ist es dagegen möglich, aus den einheitlichen mathematischen Risiken $D_1, D_2, \ldots$ der einzelnen Operationen das mathematische Risiko D der Gesamtgruppe zu berechnen.

Wir sahen (vgl. S. 27, Formel (12)), daß, falls $m_1, m_2, m_3 \ldots$ die mittleren Fehler der Variabeln $a, b, c, \ldots$ und m den mittleren Fehler ihrer Summe $a + b + c + \cdots$ bezeichnen, die Relation gilt:

$$m^2 = m_1^{\,2} + m_2^{\,2} + m_3^{\,3} + \cdots.$$

Diese Relation wird offenbar auch für die analog definierten Größen M gelten. Nehmen wir also an, es sei s der Betrag der ersten Versicherung und es seien bzw. $s_2, s_3 \ldots$ die Beträge aller übrigen, und berücksichtigen wir dabei, daß, falls $m(C\alpha)$ der mittlere Fehler des Produkts einer Konstanten C mit α, und $m(\alpha)$ der mittlere Fehler von α ist, die Gleichung besteht:

$$m(C\alpha) = Cm(\alpha)^{1)},$$

so erhalten wir als mittleres Risiko M der Gruppe:

1) Es ist in der Tat

$$(Ca)^0 = \Sigma C(a\varphi(a)) = C\Sigma a\varphi(a) + Ca^0$$

$$\{m(Ca)\}^2 = \Sigma(Ca - Ca^0)^2\varphi(a) = C^2\Sigma(a - a^0)^2\varphi(a) = C^2\{m(a)\}^2.$$

$$M = +\sqrt{s_1^2 M_1^2 + s_2^2 M_2^2 + s_3^2 M_3^2 + \cdots}. \tag{9}$$

Bezeichnet nun D das entsprechende mathematische Risiko, so liefert die Gleichung (8):

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{s_1^2 M_1^2 + s_2^2 M_2^2 + \cdots}. \tag{10}$$

Die Anwendung der Gleichung (10) erscheint aber nur in einem einzigen Falle gerechtfertigt, in dem Falle nämlich, wo die betrachteten Wahrscheinlichkeiten durch das Gaußsche Fehlergesetz definiert werden. Dies trifft aber dann und nur dann zu, falls die Versicherung der Gruppe unendlich zahlreich und voneinander unabhängig sind. Die Anwendung der Gleichung (10) im Falle endlich vieler Operationen findet mit einer desto kleineren Annäherung statt, je kleiner die Anzahl derselben ist, ohne daß es möglich erscheint, die Größe des dadurch begangenen Fehlers zu bestimmen.[1])

Weder die Größen M noch die Größen D, welche von den verschiedenen Theoretikern gebraucht werden, genügen also für sich genommen, um das Risiko einer Versicherung mit Ausschluß der anderen völlig zu charakterisieren, — oder sie genügen beide in demselben Grade, falls sie durch einen konstanten Faktor verbunden sind, d. h. falls das Gaußsche Gesetz und die Gleichung (10) gelten. Es folgt aber aus der immer vorhandenen Möglichkeit, das mittlere Risiko einer Gruppe von Operationen aus den mittleren Risiken jeder einzelnen Operationen zu bestimmen, daß der auf den Begriff des mittleren Risikos gegründeten Theorie ein Grad von Vollständigkeit und von Genauigkeit eigen ist, welcher auf anderem Wege nicht erreichbar ist.

7. Es seien λ verschiedene Spieler vorhanden, welche an demselben Spiele teilnehmen, und es sei

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_\lambda = 1.$$

Die Gleichung (9) liefert:

$$M^2 = \lambda M_1^2.$$

Man hat dagegen, falls E_1 bzw. E den Einsatz jedes einzelnen Spielers bzw. den Gesamteinsatz der Gruppe bezeichnen:

$$E = \lambda \cdot E_1.$$

Während also E wächst wie λ, wächst M wie $\sqrt{\lambda}$.

1) Vgl. *Bohlmann, Lebensversicherungsmathematik*, Anm. 168.

Man erhält auch aus den zwei vorhergehenden Relationen

$$\frac{M}{E} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{M_1}{E_1}. \tag{11}$$

Im Gegensatz zu M (*dem absoluten mittleren Risiko*) nennt man $\frac{M}{E}$ das *relative mittlere Risiko* einer Gruppe. Aus der Gleichung (11) folgt, daß das relative mittlere Risiko umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Anzahl der Versicherungen ist, aus welchen die betrachtete Gruppe besteht.

Mit Recht hat man in der Gleichung (11) die Formulierung des fundamentalen Prinzips des gesamten Versicherungswesens gesehen, in seiner tiefsten Bedeutung ausgedrückt. Diese Gleichung zeigt nicht nur die Möglichkeit, das Versicherungsverfahren allemal da anzuwenden, wo eine Gesamtheit von Elementen vorhanden ist, für welche eine angebbare Wahrscheinlichkeit p dafür besteht, daß eine gewisse Zustandsänderung eintritt, sondern sie liefert die Erklärung der Tatsache, daß die Zweckmäßigkeit der Anwendung des Versicherungsverfahrens mit der Zahl der versicherten Elemente wächst, und erlaubt, ein Maß des Sicherheitsgrads des Verfahrens als Funktion der Anzahl der versicherten Elemente anzugeben.

8. Es seien λ getrennte Spieler vorhanden, denen bzw. die Summen

$$s_1, s_2, \ldots s_\lambda$$

in dem Falle bezahlt werden sollen, daß ein gewisses Ereignis eintritt.

Man fragt nach dem System von Verhältnissen

$$\frac{s_2}{s_1} = a_2, \quad \frac{s_3}{s_1} = a_3, \ldots, \frac{s_\lambda}{s_1} = a_\lambda,$$

welches das relative mittlere Risiko

$$\frac{M}{s_1 + s_2 + \cdots + s_\lambda} = \frac{M_1\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \cdots s_\lambda^2}}{s_1 + s_2 + \cdots + s_\lambda}$$

zu einem Minimum macht. Ist

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_\lambda = \text{konst.},$$

so wird auch M zu einem Minimum werden.

M_1 ist unabhängig von s_1; es handelt sich also darum,

$$\frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \cdots s_\lambda^2}}{s_1 + s_2 + \cdots s_\lambda} = \frac{\sqrt{1 + a_2^2 + \cdots + a_\lambda^2}}{1 + a_1 + \cdots + a_\lambda}$$

zu einem Minimum zu machen. Setzt man

$$\varphi = \frac{1 + a_2^2 + \cdots + a_\lambda^2}{(1 + a_1 + \cdots + a_\lambda)^2},$$

so folgt zunächst aus

$$\varphi = \text{Minimum}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = \cdots = \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0.$$

Man hat also das Gleichungssystem

$$a_2 + a_2^2 + \cdots a_\lambda a_2 - a_2^2 - a_3^2 - \cdots a_\lambda^2 = 1$$
$$a_3 + a_2 a_3 + a_3^2 + \cdots a_\lambda a_3 - a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_\lambda^2 = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_\lambda + a_\lambda a_2 + a_\lambda a_3 + \cdots + a_\lambda^2 - a_2^2 - a_3^2 - \cdots a_\lambda^2 = 1,$$

das durch die Werte

$$a_2 = a_3 \cdots = a_\lambda = 1$$

befriedigt wird. Ein Maximum hat man offenbar für

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_\lambda = 0$$
$$s_1 = \sum s.$$

Das relative und das absolute mittlere Risiko werden also zu einem Minimum, falls, alle anderen Elemente gleich vorausgesetzt, die Anteile der einzelnen Spieler gleich sind.

9. Es werde eine Gruppe von Versicherungen angenommen, deren sämtliche Elemente identisch sind. Das Hinzukommen einer neuen Gruppe ähnlicher Versicherungen wird das relative mittlere Risiko herabsetzen, falls die Beträge der neuen Versicherung mit dem Betrag der Versicherungen der ursprünglichen Gruppe übereinstimmen. Ist dagegen der Betrag der neuen Versicherung größer als derjenige der ursprünglichen, so wird eine Vergrößerung oder eine Verkleinerung des relativen mittleren Risikos eintreten, je nachdem der Einfluß der Vergrößerung des Betrages oder derjenige der Vergrößerung der Anzahl der Versicherungen der Gesamtgruppe überwiegen.

Die dadurch entstehenden Probleme lassen sich auf folgendes Schema zurückführen. Ist eine Gruppe (λ), bestehend aus λ gleichartigen Versicherungen vom Betrage 1 gegeben, und eine Gruppe (λ_1), bestehend aus λ_1 Operationen, die denjenigen der ersten Gruppe ähnlich, aber vom Betrag s sind, $(s \neq 1, s > 0)$, so handelt es sich darum, λ_1 (bzw. s) derart zu bestimmen, daß, wenn s (bzw. λ_1) gegeben ist, das relative mittlere Risiko der aus (λ) und (λ_1) bestehenden Gruppe $(\lambda + \lambda_1)$ mit dem relativen mittleren Risiko der ursprünglichen Gruppe (λ) übereinstimmt, oder von diesem um eine gegebene Größe abweicht.

Ist C das Verhältnis des relativen mittleren Risikos der Gruppe (λ) zum relativen mittleren Risiko der Gruppe $(\lambda + \lambda_1)$, so sieht man unmittelbar, daß

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C \frac{\sqrt{\lambda + \lambda_1 s^2}}{\lambda + \lambda_1 s}$$

die Gleichung des Problems ist.

Wir können aber allgemeiner annehmen, daß die λ Versicherungen der ursprünglichen Gruppe von verschiedenem Betrage sind (bzw. vom Betrag $s_1, s_2 \ldots s_\lambda$), und daß $s_1', s_2', \ldots s_\lambda'$ bzw. die Beträge der Versicherungen sind, aus welchen die hinzukommende Gruppe (λ_1) besteht. Werden alle übrigen Elemente gleich angenommen, so fragt es sich, welche Bedingungen den Beträgen s und s' aufzuerlegen sind, damit das relative mittlere Risiko der Gruppe $(\lambda + \lambda_1)$ mit dem relativen mittleren Risiko der Gruppe (λ) übereinstimmt, oder von diesem um eine gegebene Größe abweicht.

Man findet[1]) z. B., daß, falls

$$\lambda s = s_1 + s_2 + \cdots + s_\lambda; \qquad \lambda_1 s' = s_1' + s_2' + \cdots + s_{\lambda_1}'$$
$$\lambda t^2 = s_1^2 + s_2^2 \cdots + s_\lambda^2; \qquad \lambda_1 t'^2 = s_1'^2 + s_2'^2 + \cdots s_{\lambda_1}'^2$$

die Ungleichung

$$\lambda \left(\frac{s t'^2}{s' t^2} - 2\right) \leqq \lambda_1 \frac{s'}{s} \tag{12}$$

die Bedingung dafür ausdrückt, daß das relative mittlere Risiko von $(\lambda + \lambda_1)$ nicht größer ist, als dasjenige von (λ).

Ist

$$s = s_1 = s_2 = \cdots = s_\lambda = 1; \qquad s' = s_1' = s_2' = \cdots = s_{\lambda_1}',$$

1) *Hausdorff, Das Risiko bei Zufallsspielen* im Berichte der math. phys. Klasse der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Nov. 1897, S. 511.

so wird die Gleichung (13) zu

$$\lambda\left(1-\frac{2}{s'}\right) \leqq \lambda_1. \qquad (13)$$

Die Gleichung (13) ist offenbar identisch in λ_1 befriedigt, falls $s' = 2$; nur für größere Werte von s' wird man nach einer unteren Grenze von λ_1 fragen.

In analoger Weise sieht man, daß die Bedingung (12) identisch in λ_1 befriedigt wird, wenn

$$st'^2 \leqq 2s't^2; \qquad \frac{t'^2}{s'} \leqq 2\frac{t^2}{s}.$$

10. Die in Nr. 9 abgeleitete Minimumsbedingung ist als besonderer Fall in der anderen enthalten, welche die Minimalforderung für das absolute Risiko einer Gesamtheit ungleichartiger Versicherungen darstellt. Das mittlere Risiko einer Versicherung (k) für ein Versicherungsjahr ist offenbar

$$M_k = \sqrt{p_k q_k} \cdot c_k s_k,$$

wo s_k die Versicherungssumme, c_k das auf die Versicherungssumme 1 reduzierte Kapital zu Ende des Jahres (die Differenz zwischen der Einheit und der Reserve zur selben Zeit), p_k und q_k die Überlebens- bzw. die Sterbenswahrscheinlichkeit in dem betreffenden Versicherungsjahr bedeuten.

Bezeichnet M, wie vorhin, das mittlere Risiko des betrachteten Versicherungsbestandes, so ist es durch die Gleichung definiert:

$$M^2 = \sum_{(k)} M_k^2 s_k^2,$$

wo die Summation über alle Versicherungen auszudehnen ist. Die Zurückführung des absoluten Risikos eines beliebigen Bestandes auf das Risiko eines Bestandes gleichartiger Versicherungen läßt sich durch Einsetzen geeigneter Mittelwerte vollziehen. Als solche wählt *Radtke*[1]) die folgenden:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_k c_k^2 s_k^2}{\Sigma p_k q_k c_k^2}}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{\Sigma p_k q_k c_k^2}{\Sigma p_k q_k}}$$

$$\bar{p}\bar{q} = \frac{\Sigma p_k q_k}{L} = (1-\bar{q})\bar{q}.$$

L bedeutet die Anzahl der Versicherungen des Bestandes.

1) *Die Stabilität der Lebensversicherungsanstalten*, Berlin 1903, § 1, 4.

Die Gleichungen bestimmen $\bar{s}$ und $\bar{c}$ eindeutig, auch $\bar{q}$, da für das Todesfallgeschäft $\bar{q} < \frac{1}{2}$ sein muß. Mithin ist

$$M = \sqrt{L \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{c} \cdot \bar{s}}.$$

Ist $S = \sum s_k$, so fragen wir nach dem Wertesystem $s_1^0, s_2^0, \ldots$, das

$$M^2 = \sum_{(k)} s_k^2 M_k^2 = f(s_1, s_2, \ldots s_L)$$

zu einem Minimum macht, während die Nebenbedingung

$$\sum s_k - S = \varphi(s_1, s_2, \ldots s_L) = 0$$

besteht. Setzen wir

$$F(s_1, s_2, \ldots, s_L) = f(s_1, s_2, \ldots, s_L) + \lambda\varphi(s_1, s_2, \ldots, s_L),$$

so hat man zunächst aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} = \frac{\partial f}{\partial s_1} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = 2M_1^2 s_1 + \lambda = 0$$

$$\lambda = -2M_1^2 s_1$$

und durch Einsetzen in

$$\frac{\partial F}{\partial s_k} = \frac{\partial f}{\partial s_k} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = 2M_k^2 s_k + \lambda = 0$$

$$M_k^2 s_k = M_1^2 s_1 = \frac{S}{\sum \frac{1}{M_k^2}} = \varrho$$

$$S_k^0 = \frac{\varrho}{M_k^2}.$$

Das absolute Risiko eines Bestandes von Versicherungen wird bei gegebener Gesamtversicherungssumme zu einem Minimum, wenn die auf die einzelnen Versicherungen entfallenden Versicherungssummen sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der zugehörigen absoluten Risiken.

§ 2. **Die Definition des Risikos in der Lebensversicherung.**

11. Die Präzisierung des Risikobegriffs einer Versicherungsanstalt erreicht man, sei es direkt, sei es dadurch, daß man als Risiko der Anstalt die Summe der Risiken der einzelnen Versicherungen annimmt, die von der in Rede stehenden Anstalt abgeschlossen wurden und noch zu der Zeit bestehen, für welche die Risikobestimmung stattfindet.

Bohlmann nimmt als gegeben an, einen Versicherungsbestand Γ einer Lebensversicherungsgesellschaft zu einem bestimmten Zeitpunkte t, etwa am Schlusse eines Geschäftsjahres.

Er setzt dann wie gewöhnlich voraus:

daß man mit Nettoprämien und Nettofonds zu tun hat, und daß die Rechnungsgrundlagen dem wahrscheinlichen Zustande der Wirklichkeit entsprechen,

daß, im Falle wo ein Versicherer, der dem fixierten Versicherungsbestande angehört, mehrere Polizen hält, diese zu einer einzigen Versicherung vereinigt worden sind;

daß, im Falle wo ein Versicherter an Versicherungen auf verbundene Leben beteiligt ist, diese ebenfalls zu einer einzigen zusammengezogen worden sind;

daß die durch den Tod fällig werdenden Kapitalien erst am Ende des Sterbejahres ausgezahlt werden,

und führt den Begriff einer *Gruppierung der künftigen Todesfälle* ein, welche festgelegt ist, wenn für jeden Versicherten ein bestimmtes Versicherungsjahr vorgeschrieben wird, in dem er sterben soll. Die Anzahl aller logisch denkbaren Gruppierungen von Todesfällen ist eine endliche; wir können dieselben nach einem willkürlich gewählten Prinzip ordnen und abzählen.

Wird eine Periode (t_1, t_2) zugrunde gelegt, die im Zeitpunkte $t_1 < t$ beginnt und mit dem Zeitpunkte $t_2 > t$ abläuft, so definiert man das Risiko der Gesellschaft in der genannten Periode in Funktion der Wahrscheinlichkeiten q_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, die jeder einzelnen Gruppierung der Todesfälle zukommen, und der Differenz $A_n - E_n$, welche jeder vorgeschriebenen Gruppierung der Todesfälle entspricht. Daß die Wahrscheinlichkeit q_n existiert, geht aus den Wahrscheinlichkeitseigenschaften und aus der Annahme der Existenz der Sterbenswahrscheinlichkeit $q(x, x+1)$ für jedes Individuum der Gesamtheit hervor; auch geht daraus hervor, daß

$$\sum_{n=1,\ldots} q_n = 1$$

ist.

Unter den Ausgaben A einer Periode versteht man die Auszahlungen an Versicherungssummen, die in ihr fällig werden, und die Prämienreserven, die am Ende derselben zurückzustellen sind; unter den Einnahmen E der Periode die Einnahmen an Nettoprämien, die in ihr fällig werden, und die Reserven, die zur Zeit

t_1 rechnungsmäßig vorhanden sind; jeder gegebenen Gruppierung n der Todesfälle werden besondere Werte A_n der Ausgaben A und E_n der Einnahmen E entsprechen; die positive oder negative Differenz $A_n - E_n$ stellt den Gewinn oder den Verlust des Bestandes dar, welcher dieser Gruppierung entspricht.

Gemäß der im vorigen Paragraphen eingeführten Begriffe werden wir zu unterscheiden haben

das *mathematische Risiko der Gesellschaft gegenüber Γ*, und das *mathematische Risiko von Γ gegenüber der Gesellschaft*, welche bzw. durch

$$D_1 = \sum_{A_n > E_n} q_n (A_n - E_n)$$

und

$$D_2 = \sum_{E_n > A_n} q_n (E_n - A_n)$$

ausgedrückt werden und einander gleich, und gleich

$$D = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=n} q_n (A_n - E_n)$$

(dem *mathematischen Risiko* überhaupt) sind, falls das Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung besteht;

das *mittlere Risiko M des Versicherungsbestandes Γ*, das durch die Gleichung definiert wird:

$$M^2 = \sum_{n=1}^{n=n} q_n (A_n - E_n)^2;$$

und die beiden *extremen Risiken*, nämlich das Maximum von $A_n - E_n$ als das *maximale Risiko der Gesellschaft gegenüber dem Bestande Γ* und das Maximum von $E_n - A_n$ als das *maximale Risiko von Γ gegenüber der Gesellschaft.*

Identifiziert man Γ mit einer einzigen Versicherung, so hat man das *Risiko einer* (einzigen) *Versicherung* für die Periode (t_1, t_2).

Nimmt man insbesondere an:

daß $t \equiv t_1$ mit dem Beginn der Versicherung und t_2 mit ihrem Schlußtermin übereinstimmt (oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß $t_2 = \infty$), so hat man das *Risiko der Versicherung* schlechthin.

Setzt man voraus, daß $t_2 = \infty$, $t = t_1 = m$, wo m die Zahl der Jahre bedeutet, welche die Versicherung schon gelaufen ist, so hat man das *fernere Risiko der noch laufenden Versicherung.*

Unter der Annahme, daß $t = t_1$, $t_2 = t_1 + 1$, hat man das *Risiko der Versicherung für das nächste Geschäftsjahr*. Ist dagegen Γ allgemein gegeben, so wird man vom *Risiko eines gegebenen Versicherungsbestandes für das nächste Geschäftsjahr* reden.[1])

§ 3. Das mathematische Risiko der Leibrente und der Todesfallversicherung.

12. Im Falle einer pränumerando zahlbaren Leibrente a_x auf (x) vom Betrag 1 sind die gegenwärtigen Werte der möglichen Leistungen des Versicherers

$$1 \text{ bzw. } 1 + v, \quad 1 + v + v^2, \ldots, \quad 1 + v + v^2 + \cdots + v^{\omega - x - 1},$$

je nachdem (x) im ersten, bzw. im zweiten ... Versicherungsjahre stirbt, oder das Alter ω erreicht, dessen Überschreitung wir als eine physische Unmöglichkeit betrachten.

Wir setzen allgemein

$$1 + v + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d} = \mathsf{a}_{\overline{n}|}.$$

Die Differenz $\mathsf{a}_x - \mathsf{a}_{\overline{n}|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnet den Gewinn $(\mathsf{a}_{\overline{n}|} < \mathsf{a}_x)$ bzw. den Verlust $(\mathsf{a}_{\overline{n}|} > \mathsf{a}_x)$ des Versicherers, falls (x) im n^{ten} Versicherungsjahre abstirbt.

Ist ${}_{n-1}|q_x$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (x) im Altersintervall $(x + n - 1, x + n)$ stirbt, und werden die wahrscheinlichen Leistungen des Versicherten und des Versicherers als gleich vorausgesetzt (was im Falle von Nettoprämien immer zutrifft), so bezeichnet

$$D(\mathsf{a}_x) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\omega-x} {}_{n-1}|q_x|\mathsf{a}_x - \mathsf{a}_{\overline{n}|}| = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}|q_x|\mathsf{a}_x - \mathsf{a}_{\overline{n}|}| \qquad (14)$$

das mathematische Risiko der betrachteten Versicherung.

Man sieht unmittelbar, daß Gleichung (14) sowohl für pränumerando, als für postnumerando zahlbare Renten gilt; in der Tat ist

$$a_x = \mathsf{a}_x - 1$$

der Wert der postnumerando zahlbaren Rente, und

$$\mathsf{a}_{\overline{n}|} - 1$$

der Wert der Gesamtleistungen des Versicherers, falls (x) im n^{ten} Versicherungsjahre stirbt.

1) Vgl. *Bohlmann*, Encyklopädie, S. 904.

Wir können aber auch nach dem Werte $D_{(m)}(\mathsf{a}_x)$ des mathematischen Risikos der Rente auf (x), die seit m Jahren besteht, fragen.

Es ist a_{x+m} die Reserve zur Zeit der Bestimmung, und es sind

$$\mathsf{a}_{\overline{1}|}, \quad \mathsf{a}_{\overline{2}|}, \ldots, \mathsf{a}_{\overline{\omega - x - m}|}$$

die möglichen Werte der Leistungen des Versicherers, welche dem Absterben von (x) im $m + 1$-ten bzw. im $m + 2$-ten, ..., im $\omega - x$-ten Versicherungsjahre entsprechen. Es ist offenbar

$$D_{(m)}(\mathsf{a}_x) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\omega-x-m} {}_{n-1}|q_{x+m}|\mathsf{a}_{x+m} - \mathsf{a}_{\overline{n}|}|$$

der gesuchte Wert des mathematischen Risikos, so daß die Gleichung besteht

$$D_{(m)}(\mathsf{a}_x) = D(\mathsf{a}_{x+m}).$$

13. Im Falle einer Todesfallversicherung A_x auf (x) vom Betrag 1 sind die möglichen Werte der Leistungen des Versicherers (die dem Absterben von (x) im ersten, zweiten, ... Versicherungsjahre der Reihe nach entsprechen) bzw. durch

$$v, \; v^2, \ldots, \; v^{\omega - x}$$

ausgedrückt. Das mathematische Risiko $D(A_x)$ von A_x ist also

$$D(A_x) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\omega-x} {}_{n-1}|q_x|A_x - v^n| = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}|q_x|A_x - v^n|.$$

Ebenso ist das mathematische Risiko $D_{(m)}(A_x)$ von A_x m Jahre nach dem Abschluß der Versicherung

$$D_{(m)}(A_x) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}|q_{x+m}|A_{x+m} - v^n|,$$

woraus man

$$D_{(m)}(A_x) = D(A_{x+m})$$

erhält.

Bezeichnen dagegen $D(P_x)$ bzw. $D_{(m)}(P_x)$ die mathematischen Risiken am Anfang und m Jahre nach dem Abschluß der Todesfallversicherung auf (x) mit jährlicher gleichbleibender Prämienzahlung, so ist, falls $\mathsf{a}_x > \mathsf{a}_{x+1} > \cdots$

$$D_{(m)}(P_x) < D(P_{x+m}).$$

Es ist zunächst

$$D(P_x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}|q_x|\mathbf{a}_{\overline{n}|} \cdot P_x - v^n|\,.$$

Denn es ist $P_x \cdot \mathbf{a}_{\overline{n}|}$ der Wert der n wahrscheinlichen Prämien vom Betrage P_x, die der Versicherte am Anfang jedes Versicherungsjahres zu leisten hat, am Anfang der Versicherung, v^n der Wert, der vom Versicherer am Ende des n^{ten} Versicherungsjahres auszuzahlenden Summe 1, ebenfalls am Anfang der Versicherung.

Sind m Jahre verflossen und hat der Versicherte das Alter $x + m$ erreicht, so ist die Reserve ${}_mV_x$ vorhanden; tritt also das Absterben von x im $\overline{m + n}$-ten Versicherungsjahre ein, so gelten einerseits als Einkünfte des Versicherers, bezogen auf die Zeit m, die Reserve ${}_mV_x$ und der diskontierte Wert $\mathbf{a}_{\overline{n}|} \cdot P_x$ der n Prämien P_x, die nach der Zeit m geleistet werden, als Auszahlung des Versicherers die Summe v^n. Man hat also nach der Definition

$$D_{(m)}(P_x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} {}_{n-1}|q_{x+m}|{}_mV_x + P_x \cdot \mathbf{a}_{\overline{n}|} - v^n|\,.$$

Setzen wir

$${}_mV_x = 1 - \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x}$$

$$P_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d$$

$$d \cdot \mathbf{a}_{\overline{n}|} = 1 - v^n$$

so bekommen wir:

$$D_{(m)}(P_x) = \frac{1}{2\mathbf{a}_x}\sum_{n=1}^{n=\infty} {}_{n-1}|q_{x+m}|\mathbf{a}_{x+m} - \mathbf{a}_{\overline{n}|}|$$

$$= \frac{\mathbf{a}_{x+m}}{\mathbf{a}_x} D(P_{x+m})\,.$$

14. Es ist leicht zu beweisen, daß

$$D(A_x) = d \cdot D(\mathbf{a}_x)$$

$$D(P_x) = \frac{D(A_x)}{1 - A_x} = \frac{D(\mathbf{a}_x)}{\mathbf{a}_x}\,.$$

Es ist $1 - A_x$ um so kleiner, je höher das Alter x ist. Das Risiko bei jährlicher Prämienzahlung ist also ein um so höheres Vielfaches des Risikos bei einmaliger Prämie, je höher das Alter x ist, in welchem die Versicherung abgeschlossen wird.

§ 4. Die kritische Zahl.

15. Als *kritische Zahl* oder *mathematische Dauer* der Rente $\mathbf{a}_x$ definieren wir die größte ganze Zahl $v = E(n)$, welche in der Wurzel n der transzendenten Gleichung

$$\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{\overline{n}|} = 0 \tag{15}$$

enthalten ist.

v definiert offenbar diejenige Dauer der Versicherung, welcher weder Gewinn noch Verlust für den Versicherer entspricht.

16. Man hat offenbar aus

$$\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_n = 0$$

$$(1 - d\mathbf{a}_x) - (1 - d \cdot \mathbf{a}_{\overline{n}|}) = 0,$$

d. h. wegen

$$1 - d \cdot \mathbf{a}_x = A_x$$

$$1 - d \cdot \mathbf{a}_{\overline{n}|} = v^n$$

$$A_x - v^n = 0$$

$$v = E(n) = E\left(\frac{\log A_x}{\log v}\right). \tag{16}$$

Gleichung (15) und Gleichung (16) haben die Wurzel n gemeinsam, und es ist andererseits $A_x - v^n$ das allgemeine Glied der Summation $D(A_x)$; man leitet daraus ab, daß die kritischen Zahlen der Leibrente $\mathbf{a}_x$ und der Todesfallversicherung A_x mit einmaliger Prämienzahlung übereinstimmen.

Werden die Prämien der Todesfallversicherung jährlich und gleichbleibend vorausgesetzt, so bestimmen sich n und $E(n)$ aus der Gleichung

$$P_x \cdot \mathbf{a}_{\overline{n}|} - v^n = 0\,.$$

Aber aus

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

$$P_x + d = \frac{1}{\mathbf{a}_x}$$

$$P_x \cdot \mathbf{a}_x = A_x$$

leitet man unmittelbar ab:

$$v^n(P_x + d) - P_x = 0$$

$$v^n - \mathbf{a}_x = A_x - v^n = 0\,.$$

Die kritische Zahl bleibt also dieselbe, auch wenn die Prämien nicht einmalig, sondern jährlich und gleichbleibend sind.

17. Die gemischte Versicherung $A_{x\overline{m}}$, die im Alter x abgeschlossen wird und m Jahre dauern soll, kann als eine lebenslängliche Todesfallversicherung aufgefaßt werden, deren wahrscheinlicher Wert A_x' der Annahme einer Überlebensfunktion l_x' entspricht, die folgenden Bedingungen genügt:

$$l_x' = l_x, \quad l_{x+1}' = l_{x+1}, \ldots, l_{x+m-1}' = l_{x+m-1}, \quad l_{x+m}' = 0.$$

In diesem Falle stimmen der Wert der temporären Leibrente a_x auf (x) und der Wert der lebenslänglichen Rente

$$\mathsf{a}_x' = \sum v^m l_{x+m}'|^m$$

überein.

Setzen wir

$$A_x' = 1 - d \cdot \mathsf{a}_x' = 1 - d|_m\mathsf{a}_x = A_{x\overline{m}},$$

so werden wir die kritische Zahl der temporären Leibrente $|_m\mathsf{a}_x$ und der gemischten Versicherung $A_{x\overline{m}}$ aus einer der von der Art der Prämienzahlung unabhängigen Gleichungen

$$A_{x\overline{m}} - v^n = 0$$

$$|_m\mathsf{a}_x - v^n = 0$$

ableiten können.

§ 5. **Das mittlere Risiko einzelner Versicherungen.**

18. Wir wollen zunächst eine Beziehung ableiten, welche allgemein für Versicherungen auf einzelne Leben und für Versicherungen auf Gruppen gilt. Es bezeichne q_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Ende des n^{ten} Jahres die Auszahlung 1 stattfindet.

Die einmalige Prämie der durch das System der q_n definierten Versicherungsoperation ist offenbar

$$E = \sum_{n=1}^{n=n} v^n q_n. \tag{17}$$

Das mittlere Risiko $M(E)$ derselben Versicherung wird also durch die Gleichung definiert:

$$\{M(E)\}^2 = \sum_{n=1}^{n=n} q_n (v^n - E)^2.$$

Wir erhalten, indem wir das Quadrat des Binoms $v^n - E$ entwickeln, und Gleichung (17) berücksichtigen,

$$\{M(E)\}^2 = \sum_{n=1}^{n=n} q_n v^{2n} - 2E\sum_{n=1}^{n=n} q_n v^n + E^2 \sum_{n=1}^{n=n} q_n$$

d. h.

$$\{M(E)\}^2 = E' - E^2, \tag{18}$$

falls

$$\sum_{n=1}^{n=n} q_n = 1 \tag{19}$$

$$E' = \sum_{n=1}^{n=n} v^{2n} q_n$$

oder, unabhängig von der Gleichung (19),

$$\{M(E)\}^2 = E' - E^2 (2 - \sum_{n-1}^{n=n} q_n).$$

Wird die Gleichung (19) zugrunde gelegt, d. h. ist E die Versicherung eines Kapitals, das sicher einmal und nur einmal ausgezahlt werden soll, so ist das Quadrat des mittleren Risikos gleich der Differenz der einmaligen Prämie E', die dem Diskontierungsfaktor v^2 entspricht, und des Quadrats der wirklich geleisteten Prämie.

Die rechnerische Bestimmung des mittleren Risikos erfordert die Anlage neuer Tafeln, welche den Grundtafeln der Versicherungsrechnung durchaus analog sind; die Werte C_x', M_x', $A_x', \ldots, C_{xy\ldots}'$, $M_{xy\ldots}'$, $A_{xy\ldots}'$, die man zu bestimmen haben wird, werden von den entsprechenden Werten C, M, A insoweit abweichen, als v durch

$$v' = \frac{1}{(1+i)^2} = v^2,$$

d. h. i durch

$$i' = (1+i)^2 - 1$$

ersetzt worden ist.

19. Gleichung (19) ist offenbar erfüllt, falls man

$$E \equiv A_x, \quad E \equiv A_{x\overline{m}|}, \quad E \equiv v^m$$

setzt.

Die mittleren Risiken der lebenslänglichen Todesfallversicherung, bzw. der gemischten Versicherung und der Versicherung *à terme fixe*, sind also, falls die Prämien einmalig sind:

$$M(A_x) = \sqrt{A_x' - A_x^2}$$

$$M(A_{x\overline{m}|}) = \sqrt{A'_{x\overline{m}|} - A^2_{x\overline{m}|}}$$

$$M(v^m) = \sqrt{v^{2m} - v^{2m}} = 0.$$

20. Es ist

$$P_{x\overline{m}|} = \frac{A_{x\overline{m}|}}{\mathsf{a}_{x\overline{m}|}} = \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{m}|}} - d$$

der Wert der gleichbleibenden jährlichen Prämie, die $A_{x\overline{m}|}$ entspricht. Wir fragen nach dem mittleren Risiko $M(P_{x\overline{m}|})$ von $P_{x\overline{m}|}$. Es ist

$$\{M(P_{x\overline{m}|})\}^2 = \sum_{n=1}^{n=m} q_n (v^n - P_{x\overline{m}|} \cdot \mathsf{a}_{\overline{n}|})^2$$

$$= \sum_{n=1}^{n=m} q_n \left\{ v^n - \left(\frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{m}|}} - d \right) \frac{1 - v^n}{d} \right\}^2$$

$$= \sum_{n=1}^{n=m} q_n \left(1 - \frac{1 - v^n}{d \cdot \mathsf{a}_{x\overline{m}|}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{d^2 \cdot \mathsf{a}^2_{x\overline{m}|}} \sum_{n=1}^{n=m} q_n (d \cdot \mathsf{a}_{x\overline{m}|} - 1 + v^n)^2$$

$$= \frac{1}{\{1 - (1 - d\,\mathsf{a}_{x\overline{m}|})\}^2} \sum_{n=1}^{n=m} q_n (v^n - A_{x\overline{m}|})^2$$

$$= \frac{1}{(1 - A_{x\overline{m}|})^2} \{M(A_{x\overline{m}|})\}^2$$

also

$$M(P_{x\overline{m}|}) = \frac{\sqrt{A'_{x\overline{m}|} - A^2_{x\overline{m}|}}}{1 - A_{x\overline{m}|}}.$$

21. Wählt man m so, daß $x + m \geqq \omega$, so gehen $A_{x\overline{m}|}$ in A_x, $P_{x\overline{m}|}$ in P_x und die gemischte in die lebenslängliche Todesfallversicherung mit jährlichen gleichbleibenden Prämien über.

Es ist somit das mittlere Risiko $M(P_x)$ von P_x durch die Gleichung definiert:

$$M(P_x) = \frac{\sqrt{A_x' - A_x^2}}{1 - A_x}.$$

22. Weiterhin

$$\left\{ M\left(\frac{v^m}{\mathsf{a}_{x\overline{m}|}} \right) \right\}^2 = \sum_{n=1}^{n=m} q_n \left(v^m - \frac{v^m}{\mathsf{a}_{x\overline{m}|}} \frac{1 - v^n}{d} \right)^2$$

$$= \frac{v^{2m}}{d^2 \cdot \mathsf{a}^2_{x\overline{m}|}} \sum_{n=1}^{n=m} q_n (v^n - A_{x\overline{m}|})^2 = v^{2m} \frac{\{M(A_{x\overline{m}|})\}^2}{(1 - A_{x\overline{m}|})^2}$$

das Quadrat des mittleren Risikos $M\left(\frac{v^m}{\mathsf{a}_{x\overline{m}|}}\right)$ der Versicherung *à terme fixe* mit jährlichen Prämien. Man hat also

$$M\left(\frac{v^m}{\mathsf{a}_{x\overline{m}|}} \right) = v^m \frac{M(A_{x\overline{m}|})}{1 - A_{x\overline{m}|}} = v^m M(P_{x\overline{m}|}).$$

23. Bei Leibrenten und Erlebensversicherungen ist Gleichung (19) nicht mehr erfüllt.

Es ist aber, wegen

$$\mathsf{a}_{x\overline{m}|} = \frac{1 - A_{x\overline{m}|}}{d}$$

$$\{M(\mathsf{a}_{x\overline{m}|})\}^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{n=1}^{n=m} q_n (1 - A_{x\overline{m}|} - 1 + v^n)^2$$

$$= \frac{1}{d^2} \sum_{n=1}^{n=m} q_n (v^n - A_{x\overline{m}|})^2 = \frac{1}{d^2} \{M(A_{x\overline{m}|})\}^2$$

also

$$M(\mathsf{a}_{x\overline{m}|}) = \frac{1}{d} \sqrt{A'_{x\overline{m}|} - A^2_{x\overline{m}|}}$$

und für $x + n \geqq \omega$

$$M(\mathsf{a}_x) = \frac{1}{d} \sqrt{A_x' - A_x^2}.$$

Setzen wir mit *Hausdorff*[1]), unter c_1 und c_2 konstante Größen verstanden,

$$E = c_1 \cdot \mathsf{a}_{x\overline{m}|} + c_2 \cdot A_{x\overline{m}|},$$

so lassen sich die betrachteten Versicherungsformen als spezielle Fälle der kombinierten Versicherung E darstellen.

Nach r Jahren ($r < m$) ist die Reserve der Versicherung E

$${}_rV_x = c_1 \cdot \mathsf{a}_{x+r:\overline{m-r}|} + c_2 \cdot A_{x+r:\overline{m-r}|};$$

stirbt der Versicherte im Laufe des $n + r$-ten Versicherungsjahres wofür die Wahrscheinlichkeit $q_n = {}_{n-1|}q_{x+r}$ besteht, so erfolgt eine Auszahlung, deren Wert

$$A_n = c_1 \cdot \mathsf{a}_{\overline{n}|} + c_2 \cdot v^n = \frac{c_1}{d} + \left(c_2 - \frac{c_1}{d} \right) v^n$$

ist. Es folgt aus der Definition der Reserve, da weitere Auszahlungen nicht stattfinden werden, und aus $\sum_{n=1}^{n=m-r} q_n = 1$, daß

1) l. c. Seite 535 ff.

$$ {}_mV_x = \sum_{n=1}^{n=m-r} q_n A_n = \frac{c_1}{d} + \left(c_2 - \frac{c_1}{d}\right) \sum_{n=1}^{n=m-r} q_n v^n . $$

Wir werden also schreiben können, indem wir mit $M_r(E)$ das mittlere Risiko von E r Jahre nach Abschluß bezeichnen:

$$ M_r^2(E) = \sum_{n=1}^{n=m-r} q_n ({}_nV_x - A_n)^2 $$

$$ = \left(c_2 - \frac{c_1}{d}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=m-r} q_n \left(\sum_{n=1}^{n=m-r} q_n v^n - v^n\right)^2 $$

$$ = \left(c_2 - \frac{c_1}{d}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=m-r} q_n v^{2n} - \left(\sum_{n=1}^{n=m-r} q_n v^n\right)^2 . $$

Eine leichte Überlegung zeigt, daß

$$ \sum_{n=1}^{n=m-r} q_n v^n = \sum_{n=1}^{n=m-r} {}_{n-1|}q_{x+r} \cdot v^n = A_{x+r:\overline{m-r}|} $$

ist; wir werden also dementsprechend

$$ \sum_{n=1}^{n=m-r} q_n v^{2n} = A'_{x+r:\overline{m-r}|} $$

schreiben, und somit dem Quadrate des mittleren Risikos die endgültige Form geben:

$$ \{M_r(E)\}^2 = \left(c_2 - \frac{c_1}{d}\right)^2 \{A'_{x+r:\overline{m-r}|} - A^2_{x+r:\overline{m-r}|}\} . $$

Aus den Substitutionen

$$ c_1 = 1, \quad c_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_1 = -P_{x\overline{m}|}, \quad c_2 = 1 $$

ergeben sich die speziellen Beziehungen:

$$ M_r(\mathbf{a}_{x\overline{m}|}) = \frac{1}{d} \sqrt{A'_{x+r:\overline{m-r}|} - A^2_{x+r:\overline{m-r}|}} $$

$$ M_r(A_{x\overline{m}|}) = \sqrt{A'_{x+r:\overline{m-r}|} - A^2_{x+r:\overline{m-r}|}} $$

$$ M_r(P_{x\overline{m}|}) = \frac{\sqrt{A'_{x+r:\overline{m-r}|} - A^2_{x+r:\overline{m-r}|}}}{1 - A_{x\overline{m}|}} $$

und für $x + n \geqq \omega$:

$$ M_r(\mathbf{a}_x) = \frac{1}{d} \sqrt{A'_{x+r} - A^2_{x+r}} $$

$$ M_r(A_x) = \sqrt{A'_{x+r} - A^2_{x+r}} $$

$$ M_r(P_x) = \frac{\sqrt{A'_{x+r} - A^2_{x+r}}}{1 - A_x} . $$

Der Vergleich dieser Formeln mit denjenigen, die den Werten 0 von r und $x + n$ von x entsprechen, liefert

$$ M_r(\mathbf{a}_{x\overline{m}|}) = M(\mathbf{a}_{x+r:\overline{m-r}|}) $$

$$ M_r(A_{x\overline{m}|}) = M(A_{x+r:\overline{m-r}|}) $$

$$ M_r(P_{x\overline{m}|}) = \frac{\mathbf{a}_{x+r}}{\mathbf{a}_x} (P_{x+r:\overline{m+r}|}) , $$

aus denen sich wiederum für $x + m \geqq \omega$ die Beziehungen für die lebenslänglichen Versicherungsformen ergeben.

§ 6. **Die Theorie der Stabilität.**

24. Neben der *Nettobilanz* einer bestimmten Gesamtheit Γ, deren Elemente die wahrscheinlichen Werte der versicherten Kapitalien von Γ, die künftigen Prämien von Γ (beide Werte auf die Zeit bezogen, zu welcher die Bestimmung der Bilanz stattfindet) und die Differenz zwischen den beiden Werten (die *Nettoprämienreserve*) sind, können wir uns ebensoviele andere Bilanzen denken, als es denkbare Gruppierungen der künftigen Todesfälle gibt (vgl. S. 326). Jeder einzelnen Bilanz wird ein Gewinn oder ein Verlust für den Versicherer entsprechen, je nachdem ihr eine dem Versicherer günstige oder ungünstige Hypothese über die Abweichung zugrunde liegt. Aus der fundamentalen Annahme der Existenz einer Sterbenswahrscheinlichkeit für jedes Individuum von Γ folgt, wie wir gesehen haben, die Möglichkeit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Gruppierung und somit diejenige der Bestimmung des Gewinnes bzw. des Verlustes, der jeder Gruppierung entspricht; eine solche Wahrscheinlichkeit ist desto kleiner, je größer der absolute Betrag der Divergenz zwischen dem Saldo der Nettobilanz und der betrachteten Bilanz ist.

Es folgt daraus, daß das mittlere Risiko M einer Gesamtheit Γ von Versicherungen, deren Risiken bzw. $M_1, M_2, \ldots$ sind (M

ist bekanntlich durch die Gleichung

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + \cdots$$

definiert) mit dem Wachsen der Anzahl L der Versicherungen von Γ unbegrenzt wächst, und daß die der durchschnittlichen Wirklichkeit entsprechenden Nettoprämien (plus den Zuschlägen, welche die sonstigen Ausgaben des Versicherers decken) keineswegs genügen können, um den Versicherer gegen die finanziellen Folgen des Eintretens ungünstiger Ereignisse zu schützen; der Ruin des Versicherers, wie der jedes Teilnehmers an einem unbegrenzt dauernden gerechten Spiele ist gewiß.

Es ist klar, daß ein Versicherer nur dann die absolute Gewißheit haben wird, auch im denkbar ungünstigsten Falle den Sterblichkeitsschwankungen gegenüber gesichert zu sein, wenn er alle die Summen, welche bei ihm versichert sind, zu leisten imstande ist, auch wenn sie den größtmöglichen Betrag haben, und zur ungünstigsten Zeit fällig werden. Ein solcher Versicherer würde aber auf die Anwendung des Versicherungsverfahrens völlig verzichten, und lediglich als Sparkasse fungieren.

Es kann aber angenommen werden (und das ist das Einzige, was praktisch denkbar ist), daß der Versicherer nicht nach der absoluten, sondern nur nach einer gewissen praktischen Sicherheit strebt, indem er sich begnügt, denjenigen Sterblichkeitsschwankungen gegenüber gesichert zu sein, deren Wahrscheinlichkeiten eine gewisse endliche Größe überschreiten, und die Zuschläge auf die Prämien dementsprechend bestimmt.

Es sei P die Nettoprämie, σP der Sicherheitszuschlag auf die Prämie (der *Risikozuschlag*). Es kann gefragt werden:

entweder wie σ zu bestimmen sei, damit eine willkürlich vorgeschriebene Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß die gebildeten Fonds den künftigen Leistungen des Versicherers gleichkommen;

oder welches die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist, falls σ gegeben ist.

Die Sätze von *Tchebycheff* und *Bernoulli* lehren[1]), daß die Wahrscheinlichkeit P dafür, daß das λ-fache des mittleren Risikos

1) Die Möglichkeit der Zurückführung der Theorie des Risikos auf die Fehlertheorie und auf das Gaußsche Fehlergesetz rührt von dem Umstande her, daß man die Gaußsche Funktion aus der Annahme eines

von den Abweichungen in den Risiken nicht überschritten wird, größer ist, als $1 - \frac{1}{\lambda^2}$ bzw. gleich

$$\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt.$$

falls die Anzahl der zur Gesamtheit Γ gehörenden Versicherungen unendlich groß ist. Ist diese Bedingung so weit erfüllt, daß die genannte Anzahl sehr groß ist, so wird man die Wahrscheinlichkeit P mit $\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$ identifizieren können, und z. B. haben

für $\lambda = 1 \quad 1 - P = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}31733$

$\lambda = 2 \quad 1 - P = 1 - \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}04551$

$\lambda = 3 \quad 1 - P = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}00270$

$\lambda = 4 \quad 1 - P = 1 - \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}00006\,.$

Wie groß man λ zu wählen hat, um die „praktische Gewißheit" zu erreichen, ist eine Frage des subjektiven Ermessens. Einem Fonds von der Höhe des mittleren Risikos würde eine Wahrscheinlichkeit des Genügens entsprechen, die um sehr wenig $^2/_3$ überschreitet: dagegen ist dieselbe Wahrscheinlichkeit sehr nahe der Einheit (d. h. der absoluten Gewißheit) falls $\lambda = 3$ oder $\lambda = 4$ angenommen wird.

25. Es seien alle die einzuführenden Summen auf die Zeit t bezogen, und es sei (t_1, t_2) die Zeitperiode, in welcher sie fällig werden.

Bezeichnet E_n' die Summe der Nettoprämien und der Sicherheitszuschläge, die dem Versicherer in der Periode (t_1, t_2) gezahlt werden, falls die Gruppierung (n) der künftigen Todesfälle eintritt, und werden die Differenzen $A_n - E_n'$ gebildet, die den möglichen Gruppierungen entsprechen, so folgt, falls die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\varphi(n)$ jeder Gruppierung (n) gleich 1 ist

totalen Fehlers ableiten kann, der die Resultante unendlich vieler Elementarfehler ist. Hier ist die totale Abweichung, zusammengesetzt aus der Elementarabweichung jeder einzelnen Versicherung der Gesamtheit Γ.

$$\sum_{n=1}^{n=n}\varphi(n) = 1$$

aus der Beziehung

$$E_n' = (1+\sigma)E_n$$

daß der wahrscheinliche Wert

$$\sum_{n=1}^{n=n}\varphi(n)(A_n - E_n')$$

der Differenz $A_n - E_n'$ gleich

$$\sigma\sum_{n=1}^{n=n}\varphi(n)E_n = \sigma E_n$$

ist, wobei E den wahrscheinlichen Wert der Nettoprämien der Periode (t_1, t_2) bezeichnet.

Definieren wir als *mittleres Bruttorisiko* M' die mittlere Abweichung der Differenz $A_n - E_n'$ von ihrem wahrscheinlichen Werte, so daß

$$\{M'\}^2 = \sum_{n=1}^{n=n}\varphi(n)\{\sigma E - A_n + E_n\}^2$$

wird, so erlauben die Überlegungen der vorigen Nummern eine Grenze $\lambda M'$ anzugeben, welche die wirklich eintretenden Abweichungen voraussichtlich nicht überschreiten werden.

Bezeichnen wir also mit V die Nettoprämienreserve zur Zeit t und ziehen den wahrscheinlichen Wert σE der künftigen Sicherheitszuschläge in Betracht, so finden wir, daß der zur Deckung der künftigen Risiken nötige Fonds innerhalb der Grenzen

$$V - \lambda M' - \sigma E \quad \text{und} \quad V + \lambda M' - \sigma E$$

bleibt. Wir nennen

$$R = \lambda M' - \sigma \cdot E$$

die *Risikoreserve* der Gesamtheit Γ zur Zeit t und für die Periode (t_1, t_2),

Risikobilanz die Bilanz, welche der größten Abweichung $\lambda M'$ die Sicherheitszuschläge gegenüberstellt;

und nennen die Versicherungsunternehmung *stabil*, falls die Bedingung

$$R \leqq 0$$

erfüllt ist.

26. Die hier gegebene Definition der Risikoreserve setzt keine weiteren Fonds voraus, als die Nettoprämienreserve, und postuliert die Wahl von Zinsfüßen, von Sterblichkeitssätzen und von Zuschlägen auf die Prämien (außer $\sigma \cdot E$), welche dem wirklichen Verzinsungsfaktor der Kapitalien der durchschnittlichen Sterblichkeit der Versicherten und den wirklichen Ausgaben des Versicherers entsprechen. Man kommt aber der Wirklichkeit näher, wenn man annimmt, daß die Wahl der Rechnungsgrundlagen derart getroffen wird, daß auch dadurch der Versicherer Gewinne erzielt, und daß sonstige Reservefonds existieren. Die vorher formulierte Stabilitätsbedingung lautet dann: das λ-fache des mittleren Bruttorisikos soll größer sein, als die Summe der Sicherheitszuschläge und der sonstigen Gewinne und Reservefonds des Versicherers.

Die Risikobilanz wird also den Inhalt haben:

Aktiva		Passiva	
Sterblichkeitsgewinn Zinsgewinn Gewinn aus Zuschlägen Sicherheitsfonds		Sterblichkeitsschwankungen Überschuß der Aktiva über die Passiva	$\lambda M'$ $-R$

Es ist von selbst klar, daß in die Risikobilanz nur diejenigen Summen einzusetzen sind, welche der Versicherer für eigene Rechnung behalten hat; die rückversicherten Summen bleiben ausgeschlossen.

Das mittlere Bruttorisiko M' wird man endlich durch das mittlere (Netto)-Risiko M ersetzen, wenn besondere Sicherheitszuschläge nicht vorhanden sind, und die Gewinne, sowie die übrigen Reservefonds auch den Zweck haben, die Sterblichkeitsschwankungen zu decken.

27. Mit Hilfe der Risikoreserve können wir also feststellen, ob eine bestimmte Versicherungsunternehmung, wenn ein gewisser Grad der Sicherheit vorgeschrieben wird, stabil ist oder nicht.

Einen Maßstab für den „Grad der Stabilität" führt *Radtke* ein, indem er in der Gleichung für R λ durch λ' derart ersetzt, daß R in R' übergeht; aus der Gleichung

$$R' = 0$$

erhält man einen Wert λ', aus dem man auf die Wahrscheinlich-

keit schließen kann, mit welcher die Gesellschaft den Zufallsschwankungen gegenüber geschützt ist;

$$N = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

ist der gesuchte Maßstab der Stabilität. Eine Unternehmung für welche das Kriterium eben erfüllt ist ($R = 0$) ist stabil vom Grade $N = 1$, da für sie $\lambda = \lambda'$ ist; N ist dagegen ein echter Bruch für Unternehmungen, die das Kriterium nicht erfüllen und größer als 1 für Unternehmungen mit negativer Nettoreserve. Der Grad der Stabilität ist desto größer, je größer der absolute Betrag der Risikoreserve ist, je mehr sich die Risikoreserve nach der negativen Seite hin von der Null entfernt.

Es folgt aus der Definition

$$R = \lambda M' - \sigma E$$

der Risikoreserve, daß, wenn alle übrigen Elemente gleich sind (also auch λ vorgeschrieben), die Reserve R desto kleiner ist, je kleiner das Verhältnis des Risikos M zu dem Gesamtbetrag der versicherten Kapitalien oder der Prämien E ist.

Dies zeigt den inneren Zusammenhang, welcher die Bedingungen der Stabilität mit dem mittleren Risiko verbindet: die Bedingungen der Stabilität sind in der Tat um so eher erfüllt, je kleiner das betreffende relative Risiko ist, und der Grad der Stabilität ist stets um so größer, je niedriger das relative Risiko des Bestandes ausfällt.

So lauten z. B. die Sätze, daß das mittlere Risiko eines Bestandes gleichartiger bzw. ungleichartiger Versicherungen zu einem Minimum wird, falls die Beträge der versicherten Summen einander gleich sind bzw. sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der zugehörigen absoluten Risiken, indem wir sie auf die Risikoreserve beziehen: die Risikoreserve wird — *ceteris paribus* — zu einem Minimum und somit der Stabilitätsgrad zu einem Maximum, falls die versicherten Summen einander gleich sind, bzw. falls sie sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der zugehörigen Risiken.

28. Damit ist aber die Möglichkeit gewonnen, der Frage nach dem Maximum der Versicherungssumme, die eine bestimmte Versicherungsunternehmung für eigene Rechnung übernehmen

kann, einen präzisen Sinn zu erteilen und ihr eine mathematische Grundlage zu geben.

Erachten wir als zulässig nur diejenigen Versicherungssummen, welche die Stabilität eines gegebenen Bestandes nicht gefährden, so gelangen wir dadurch zu einer Bedingungsgleichung, durch welche das Maximum des Betrages einer neuen Versicherung definiert wird.

Es folgt daraus, daß unser Maximumproblem keinen Sinn besitzt, wenn die Zahl der neuen Versicherungen größer als 1 ist (jedenfalls, wenn man nicht willkürliche Nebenbedingungen hinzunimmt), daß das Maximum verschieden ist, je nach der Art der neuen Versicherung und nach dem Eintrittsalter des neu Versicherten, und daß sich das Maximum mit der Änderung des Versicherungsbestandes zeitlich fortwährend ändert.

29. Es liegt eine gewisse Willkür in der Forderung, der Betrag der hinzukommenden Versicherung solle die Stabilität des vorhandenen Bestandes nicht „gefährden". Man kann darunter verstehen:

I. daß nach dem Zugang die Risikoreserve nicht positiv wird.

Es ist dies offenbar das wenigste, was man verlangen kann. Begnügt man sich nicht damit (und es ist kaum daran zu denken, daß man sich in der Praxis mit einem Kriterium zufrieden stellt, das die Möglichkeit der Aufzehrung der Dividendenreservefonds und der Gewinnreserven durch die Zufallsschwankungen keineswegs ausschließt), so können die strengeren Forderungen gestellt werden:

II. daß die Risikoreserve nicht zunimmt;

III. daß der Grad der Stabilität nicht kleiner wird.

Weniger eine Maximalforderung, als der Ausdruck von etwas Wünschenswerten ist das Prinzip

IV. daß die Risikoreserve zu einem Minimum wird.

Es ist klar, daß I bis IV übereinstimmen, falls bei dem vorhandenen Bestande die Stabilitätsbedingung gerade erfüllt ist, und daß die Forderungen I und II identisch erfüllt sind (d. h. daß kein Maximum in ihrem Sinne existiert) falls die hinzukommende Versicherung „stabil" ist.

Es bezeichne $\mathfrak{A}$ den Aktiv- $\mathfrak{P}$, den Passivposten der Risikobilanz des vorhandenen Bestandes; es sind dann

$$R = \mathfrak{P} - \mathfrak{A}, \quad N = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}}$$

die entsprechende Risikoreserve bzw. der entsprechende Grad der Stabilität. Wir können uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, daß der Bestand aus gleichartigen Versicherungen besteht; wie wir gesehen haben, läßt sich der allgemeine Fall eines Bestandes ungleichartiger Versicherungen auf den ersten durch die Einführung geeigneter Mittelwerte zurückführen.

Besteht also Γ aus L gleichartigen Versicherungen, und bezeichnen s, P und M_1' das gesamte versicherte Kapital, die einheitliche Prämie, und das einheitliche mittlere Bruttorisiko, so ist

$$R = \lambda M' - \sigma E = \lambda s M_1' \sqrt{L} - \sigma s P L.$$

Kommt eine neue Versicherung hinzu, so wächst das Quadrat des Passivpostens um den Betrag

$$C x^2 = \lambda^2 p' q' x^2$$

die Summe der Aktivposten um

$$D x = \sigma x \pi$$

wo x die Versicherungssumme ist, und p', q', π, dieselbe Bedeutung haben, wie p, q, P für den alten Bestand. Ist demgemäß

$$R' = \mathfrak{P}' - \mathfrak{A}'$$

die Risikoreserve des neuen Bestandes, so ist auch

$$R' = \sqrt{\mathfrak{P}^2 + C^2 x^2} - (\mathfrak{A} + D x)$$

und die Forderungen I bis IV lauten

(I) $$\sqrt{\mathfrak{P}^2 + C^2 x^2} - (\mathfrak{A} + D x) \leqq 0$$

(II) $$\sqrt{\mathfrak{P}^2 + C^2 x^2} - (\mathfrak{A} + D x) \leqq \mathfrak{P} - \mathfrak{A} = R$$

(III) $$N' = \frac{\mathfrak{A} + D_x}{\sqrt{\mathfrak{P}^2 + C^2 x^2}} \geqq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}} = N$$

(IV) $$\sqrt{\mathfrak{P}^2 + C^2 x^2} - (\mathfrak{A} + D x) = \text{Minimum}.$$

Werden die verschiedenen Maxima der Reihe nach mit $X(\mathrm{I})$, $X(\mathrm{II})$, $X(\mathrm{III})$, $X(\mathrm{IV})$ bezeichnet, so ist z. B.

$$X(\mathrm{II}) = \frac{2\mathfrak{P}}{D\left(\frac{C^2}{D^2} - 1\right)}$$

$$X(\mathrm{III}) = \frac{2\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{A} \cdot D\left(\frac{C^2}{D^2} - \frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{A}^2}\right)} = \frac{2\mathfrak{A}}{D\left(N^2 \frac{C^2}{D^2} - 1\right)}.$$

Das Maximum III fällt um so kleiner aus, je größer der Grad der Stabilität des alten Bestandes ist

$$X(\mathrm{IV}) = \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{\frac{C^2}{D^2} - 1}}.$$

Ist $C = D$, d. h. ist die neue Versicherung „stabil“, so existiert kein Maximum im Sinne der Forderung IV. Wir haben gesehen, daß in diesem Falle weder Maximum I noch Maximum II existieren.

Ist dagegen C gegenüber D sehr groß, so daß 1 gegenüber $\frac{C^2}{D^2}$ vernachlässigt werden kann, so hat man näherungsweise

$$X(\mathrm{II}) = \frac{2\mathfrak{P}}{D\frac{C^2}{D^2}} = \frac{2\mathfrak{P} D}{C^2}$$

$$X(\mathrm{IV}) \frac{\mathfrak{P}}{C\sqrt{\frac{C^2}{D^2}}} = \frac{\mathfrak{P} \cdot D}{C^2}$$

$$X(\mathrm{IV}) = \tfrac{1}{2} X(\mathrm{II}).$$

Forderung II ist in der Literatur unter dem Namen *Laurent*sche[1]) Forderung bekannt; für IV darf man wohl die Bezeichnung „*Radtke*sche Forderung“ einführen.

Ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, d. h. $N = 1$, so ist, wie man leicht sieht, $X(\mathrm{II}) = X(\mathrm{III})$. Ist dagegen $\mathfrak{P} < \mathfrak{A}$, d. h. $N > 1$, so ist

$$X(\mathrm{II}) > X(\mathrm{III})$$ [2]).

30. Im Falle eines gleichartigen Bestandes ist

$$R = \lambda s M_1' \sqrt{L} - \sigma \cdot s \cdot P \cdot L = a\sqrt{L} - b \cdot L,$$

wo die abkürzenden Zeichen a und b sich aus den Formeln selbst erklären. $L = 0$ und $L = \infty$ entsprechen offenbar die Werte 0 bzw. $-\infty$ von R. Auch sieht man unmittelbar, daß für

$$L < \frac{a^2}{b^2} = \frac{\lambda^2 M_1'^2}{\sigma^2 P^2}$$

$$R > 0$$

ist. L gleich

$$L_0 = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{\lambda}{\sigma} \frac{M_1'}{P}\right)^2 \qquad (20)$$

1) Journal des Actuaires Français, Band II, 1873.

2) Vgl. über das Maximum der Versicherungssumme und die sich darauf beziehende Literatur, *Landré*, Transactions of the II intern. act. Congreß, London, 1899, S. 110.

entspricht dagegen die Risikoreserve Null. Der Wert L_0 von L gibt die Zahl der Versicherungen an, welche von einer Versicherungsunternehmung abgeschlossen sein müssen, damit sie eben stabil ist; wir nennen ihn die Minimalzahl der Versicherten.

Die Risikoreserve ist positiv für $L < L_0$; aus

$$\frac{dR}{dL} = \frac{1}{2} a \frac{1}{\sqrt{L}} - b = 0$$

$$\frac{d^2R}{dL^2} = -\frac{a}{4L\sqrt{L}}$$

erhält man, daß für

$$L = \frac{1}{4}\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{4} L_0$$

R zu einem Maximum, also die Stabilität zu einem Minimum wird.

31. Es ist endlich, wenn man setzt

$$\lambda s M_1' \sqrt{L_0} - \sigma \cdot s \cdot P \cdot L_0 = 0$$

$$\lambda' s M_1' \sqrt{L} - \sigma \cdot s \cdot P \cdot L = 0$$

$$N = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sigma s P L}{s M_1' \sqrt{L}} \frac{s M_1' \sqrt{L_0}}{\sigma \cdot s \cdot P \cdot L_0} = \sqrt{\frac{L}{L_0}}.$$

Der Grad der Stabilität ist der Quadratwurzel aus der Zahl der Versicherten direkt, der Quadratwurzel aus der Minimalzahl der Versicherten umgekehrt proportional.

Es ist ein Verdienst Bohlmanns, den Begriff der Minimalzahl mit der Theorie des Risikos in Verbindung gebracht zu haben.[1])

Sehr treffend bemerkt Radtke: „Die Bedeutung der Minimalzahl ist zunächst die, daß sie an der Hand von gleichartigen Versicherungsbeständen eine vorläufige Orientierung darüber gibt, wie groß eine Gesellschaft sein muß, damit sie stabil ist. Der Begriff der Minimalzahl hängt zunächst durchaus an der Fiktion der gleichartigen Versicherungen. Man kann allgemein die Minimalzahl beibehalten, wenn man sagt: die Minimalzahl ist von dem Moment an erreicht, wo die Risikoreserve negativ ist. Dann sind die beiden Ansprüche „die Gesellschaft ist stabil" oder „sie hat die Minimalzahl der Versicherten erreicht" verschiedene Ausdrucksweisen für dasselbe Sachverhältnis. Außer diesen Bedeutungen hat sie eine sehr wesentliche dritte Bedeutung, nämlich die einer wichtigen rechnerischen Hilfsgröße. Ordnen wir jeder Versicherung (k) die Minimalzahl $L_0^{(k)}$ zu, die angibt, wie viele der Versicherung (k) gleichartige Versicherungen vorhanden sein müssen, damit ein nur aus solchen Versicherungen bestehender Bestand stabil ist, so ist die Zahl $L_0^{(k)}$ überaus geeignet, die Versicherung (k) in hinreichender Weise durch eine einzige Zahl zu charakterisieren und dadurch sonst umständliche Rechnungen erheblich zu vereinfachen.[1])

1) *Encyklopädie,* Seite 916.

32. Die Betrachtung ungleichartiger Versicherungen führt zu keinem wesentlichen Unterschied.

Enthält der Bestand n Versicherungen, deren Beträge bzw.

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

sind, und für welche $\lambda M'$ bzw. den Wert

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

und $\sigma \cdot P$ den Wert

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

hat, so ist die Risikoreserve

$$R = \sqrt{\sum_{n=1}^{n=n} a_n^2 s_n^2} - \sum_{n=1}^{n=n} b_n s_n$$

und falls es $C - 1$ Versicherungen gibt, die jeder (r) der n ähnlich sind,

$$R = \sqrt{\sum_{n=1}^{n=n} C \cdot a_n^2 s_n^2} - \sum_{n=1}^{n=n} C \cdot b_n \cdot s_n = A\sqrt{C} - B \cdot C.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich ein Wert C_0, für welche R vom Positiven zum Negativen übergehend Null wird, und die Minimalzahl

$$L_0 = n \cdot C_0$$

bestimmen.

1) l. c. SS. 39, 40.

Tafel I.

Sterbetafel *M* und *WI* der 23 deutschen Gesellschaften.

nebst Grundzahlen zu $3\frac{1}{2}$ %.

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
20	100 000	919	50 257	1 013 125	446,24	15 386,49
21	99 081	908	48 109	980 868	425,99	14 940,25
22	98 173	887	46 057	932 759	402,06	14 514,26
23	97 286	861	44 097	886 702	377,08	14 112,20
24	96 425	835	42 229	842 605	353,33	13 735,12
25	95 590	816	40 449	800 376	333,61	13 381,79
26	94 774	804	38 747	759 927	317,59	13 048,18
27	93 970	797	37 119	721 180	304,17	12 730,59
28	93 173	795	35 560	684 061	293,15	12 426,42
29	92 378	800	34 062	648 501	285,02	12 133,27
30	91 578	808	32 626	614 439	278,13	11 848,25
31	90 770	818	31 246	581 813	272,06	11 570,12
32	89 952	831	29 917	550 567	267,03	11 298,06
33	89 121	841	28 637	520 650	261,11	11 031,03
34	88 280	856	27 408	492 013	256,77	10 769,92
35	87 424	873	26 224	464 605	253,02	10 513,15
36	86 551	889	25 084	438 381	248,94	10 260,13
37	85 662	906	23 987	413 297	245,12	10 011,19
38	84 756	928	22 931	389 310	242,59	9 766,07
39	83 828	950	21 913	366 379	239,94	9 523,48
40	82 878	975	20 933	344 466	237,93	9 283,54
41	81 903	1006	19 987	323 533	237,19	9 045,61
42	80 897	1035	19 072	303 546	235,78	8 808,42
43	79 862	1063	18 192	284 474	233,79	8 572,64
44	78 799	1092	17 344	266 282	232,21	8 338,67
45	77 707	1117	16 523	248 938	229,51	8 106,46
46	76 590	1140	15 736	232 415	226,31	7 876,95
47	75 450	1169	14 978	216 679	224,22	7 650,64
48	74 281	1204	14 247	201 701	223,12	7 426,42
49	73 077	1246	13 542	187 454	223,09	7 203,30
50	71 831	1303	12 861	173 912	225,42	6 980,21
51	70 528	1362	12 201	161 051	227,65	6 754,79
52	69 166	1425	11 561	148 830	230,14	6 527,14
53	67 741	1490	10 940	137 289	232,49	6 297,00
54	66 251	1556	10 337	126 349	234,58	6 064,51
55	64 695	1621	9 753,2	116 012,3	236,12	5 829,93
56	63 074	1691	9 187,4	106 259,1	237,97	5 593,81
57	61 383	1759	8 638,5	97 071,7	239,18	5 355,84
58	59 624	1832	8 107,2	88 433,2	240,68	5 116,66
59	57 792	1900	7 592,5	80 326,0	241,17	4 875,98

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
60	55 892	1976	7 094,4	72 733,5	242,33	4 634,81
61	53 916	2038	6 612,2	65 639,1	241,48	4 392,48
62	51 878	2097	6 147,2	59 026,9	240,07	4 151,00
63	49 781	2149	5 699,1	52 879,7	237,70	3 910,93
64	47 632	2197	5 268,8	47 180,6	234,79	3 673,23
65	45 435	2246	4 855,8	41 911,8	231,92	3 438,44
66	43 189	2302	4 459,6	37 056,0	229,67	3 206,52
67	40 887	2355	4 079,1	32 596,4	227,01	2 976,85
68	38 532	2399	3 714,3	28 517,3	223,43	2 749,84
69	36 133	2432	3 365,3	24 803,0	218,84	2 526,41
70	33 107	2452	3 032,5	21 437,7	213,19	2 307,57
71	31 249	2455	2 716,7	18 405,2	206,23	2 094,38
72	28 794	2436	2 418,8	15 688,5	197,70	1 888,15
73	26 358	2406	2 139,2	13 269,7	188,67	1 690,45
74	23 952	2360	1 878,2	11 130,5	178,80	1 501,78
75	21 592	2299	1 635,9	9 252,3	168,30	1 322,98
76	19 293	2210	1 412,2	7 616,4	156,31	1 154,68
77	17 083	2103	1 208,1	6 204,2	143,70	998,37
78	14 980	1982	1 023,6	4 996,1	130,86	854,67
79	12 998	1848	858,1	3 972,5	117,87	723,81
80	11 150	1730	711,3	3 114,4	106,63	605,94
81	9 420	1599	580,6	2 403,1	95,22	499,31
82	7 821	1443	465,8	1 822,5	83,02	404,09
83	6 378	1264	366,9	1 356,7	70,26	321,07
84	5 114	1080	284,4	989,8	58,01	250,81
85	4 034	896	216,6	705,4	46,50	192,80
86	3 138	715	162,8	488,8	35,85	146,30
87	2 423	566	121,5	326,0	27,42	110,45
88	1 857	442	89,9	204,5	20,68	83,03
89	1 415	344	66,2	114,6	15,56	62,35
90	1 071	1071	48,4	48,4	46,79	46,79

Tafel II.

Sterbetafel H^M der 20 britischen Gesellschaften.

nebst Grundzahlen, Renten, Verbindungsrenten und Todesfallversicherungen zu $3\frac{1}{2}$ %.

x	l_x	d_x	μ_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	a_x	a_{xx}	a_{xxx}	A_x	x
0	127 283	14 358	0,15920	127 283	2 553 055	52 129 621	13 872	40 948	785 908	20,058	15,079	11,633	0,32171	0
1	112 925	3 962	,07901	109 110	2 425 772	49 703 849	3 698,5	27 075,5	744 959,6	22,233	18,513	15,760	,24861	1
2	108 963	2 375	,02366	101 720	2 316 662	47 278 077	2 142,1	23 377,0	717 884,1	22,775	19,467	17,004	,22982	2
3	106 588	1 646	,01787	96 137	2 214 942	44 961 415	1 434,4	21 234,9	694 507,1	23,039	19,974	17,696	,22088	3
4	104 942	1 325	,01379	91 451	2 118 805	42 746 473	1 115,6	19 800,5	673 272,2	23,169	20,260	18,107	,21652	4
5	103 617	1 061	,01142	87 243	2 027 354	40 627 668	863,14	18 684,94	653 471,69	23,238	20,447	18,393	,21417	5
6	102 556	852	,00925	83 430	1 940 111	38 600 314	669,67	17 821,80	634 786,75	23,255	20,546	18,567	,21362	6
7	101 704	683	,00748	79 939	1 856 681	36 660 203	518,68	17 152,13	616 964,95	23,225	20,570	18,642	,21456	7
8	101 021	557	,00607	76 717	1 776 742	34 803 522	408,70	16 633,45	599 812,82	23,160	20,530	18,633	,21681	8
9	100 464	464	,06502	73 714	1 700 025	33 026 780	328,94	16 224,75	583 179,37	23,062	20,439	18,555	,22011	9
10	100 000	408	,00428	70 892	1 626 311	31 326 755	279,46	15 895,81	566 954,62	22,940	20,307	18,424	,22423	10
11	99 592	369	,00388	68 215	1 555 419	29 700 444	244,20	15 616,35	551 058,81	22,802	20,146	18,257	,22892	11
12	99 223	346	,00359	65 664	1 487 204	28 145 025	221,24	15 372,15	535 442,46	22,648	19,964	18,060	,23410	12
13	98 877	337	,00342	63 224	1 421 540	26 657 821	208,19	15 150,91	520 070,31	22,484	19,765	17,843	,23964	13
14	98 540	337	,00340	60 877	1 358 316	25 236 281	201,15	14 942,72	504 919,40	22,312	19,555	17,612	,24547	14
15	98 203	360	,00353	58 615	1 297 439	23 877 965	207,61	14 741,57	489 976,68	22,134	19,337	17,372	,25151	15
16	97 843	384	,00378	56 426	1 238 824	22 580 526	213,96	14 533,96	475 235,11	21,955	19,118	17,132	,25758	16
17	97 459	425	,00414	54 304	1 182 398	21 341 702	228,80	14 320,00	460 701,15	21,774	18,901	16,895	,26370	17
18	97 034	465	,00458	52 238	1 128 094	20 159 304	241,87	14 091,20	446 381,15	21,596	18,690	16,669	,26974	18
19	96 569	508	,00504	50 231	1 075 856	19 031 210	255,30	13 849,33	432 289,95	21,418	18,486	16,452	,27571	19
20	96 061	548	,00550	48 277	1 025 625	17 955 354	266,09	13 594,03	418 440,62	21,245	18,289	16,248	,28159	20
21	95 513	582	,00592	46 378	977 348	16 929 729	273,04	13 327,94	404 846,59	21,074	18,101	16,055	,28738	21
22	94 931	609	,00629	44 537	930 970	15 952 381	276,05	13 054,90	391 518,65	20,903	17,917	15,870	,29313	22
23	94 322	631	,00659	42 754	886 433	15 021 411	276,35	12 778,85	378 463,75	20,733	17,736	15,691	,29890	23
24	93 691	647	,00682	41 033	843 679	14 134 978	273,77	12 502,50	365 684,90	20,561	17,555	15,514	,30471	24
25	93 044	658	,00701	39 371	802 646	13 291 299	269,02	12 228,73	353 182,40	20,387	17,374	15,337	,31061	25
26	92 386	664	,00716	37 771	763 275	12 488 653	262,29	11 959,71	340 953,67	20,208	17,189	15,159	,31664	26
27	91 722	673	,00729	36 231	725 504	11 725 378	256,86	11 697,42	328 993,96	20,024	17,000	14,976	,32284	27
28	91 049	678	,00742	34 750	689 273	10 999 874	250,01	11 440,56	317 296,54	19,835	16,805	14,787	,32924	28
29	90 371	686	,00755	33 324	654 523	10 310 601	244,41	11 190,55	305 855,98	19,641	16,605	14,593	,33582	29
30	89 685	691	,00768	31 953	621 199	9 656 078	237,86	10 946,14	294 665,43	19,441	16,399	14,394	,34257	30
31	88 994	700	,00782	30 634	589 246	9 034 879	232,81	10 708,28	283 719,29	19,235	16,187	14,189	,34954	31
32	88 294	709	,00798	29 366	558 612	8 445 633	227,83	10 475,47	273 011,01	19,023	15,968	13,978	,35671	32
33	87 585	719	,00815	28 145	529 246	7 887 021	223,23	10 247,64	262 535,54	18,804	15,744	13,761	,36412	33
34	86 866	729	,00833	26 970	501 101	7 357 775	218,69	10 024,41	252 287,90	18,580	15,513	13,558	,37167	34
35	86 137	742	,00854	25 839	474 131	6 856 674	215,06	9 805,72	242 263,49	18,349	15,277	13,309	,37949	35
36	85 395	756	,00876	24 750	448 292	6 382 543	211,70	9 590,66	232 457,77	18,112	15,035	13,075	,38750	36
37	84 639	770	,00901	23 702	423 542	5 934 251	208,33	9 378,96	222 867,11	17,870	14,787	12,836	,39571	37
38	83 869	786	,00928	22 692	399 840	5 510 709	205,47	9 170,63	213 488,15	17,620	14,532	12,590	,40414	38
39	83 083	806	,00957	21 719	377 148	5 110 869	203,58	8 965,16	204 317,52	17,365	14,272	12,339	,41278	39
40	82 277	823	,00990	20 781	355 429	4 733 721	200,84	8 761,58	195 352,36	17,103	14,007	12,084	,42161	40
41	81 454	846	,01025	19 877	334 648	4 378 292	199,47	8 560,74	186 590,78	16,835	13,736	11,824	,43068	41
42	80 608	871	,01064	19 006	314 771	4 043 644	198,42	8 361,27	178 030,04	16,562	13,459	11,559	,43993	42
43	79 737	895	,01106	18 165	295 765	3 728 873	196,99	8 162,85	169 668,77	16,282	13,179	11,291	,44938	43
44	78 842	924	,01153	17 353	277 600	3 433 108	196,49	7 965,86	161 505,92	15,997	12,893	11,018	,45904	44
45	77 918	954	,01204	16 570	260 247	3 155 508	196,02	7 769,37	153 540,06	15,706	12,603	10,742	,46889	45
46	76 964	986	,01260	15 814	243 677	2 895 261	195,74	7 573,35	145 770,69	15,409	12,308	10,462	,47892	46
47	75 978	1 021	,01321	15 083	227 863	2 651 584	195,83	7 377,61	138 197,34	15,107	12,010	10,180	,48914	47
48	74 957	1 061	,01388	14 377	212 780	2 423 721	196,63	7 181,78	130 819,73	14,800	11,709	9,895	,49953	48
49	73 896	1 101	,01462	13 694	198 403	2 210 941	197,14	6 985,15	123 637,95	14,488	11,404	9,608	,51008	49

x	l_x	d_x	μ_x	D_x	N_x	S_x
50	72 795	1 144	0,01542	13 034	184 709	2 012 538
51	71 651	1 193	,01631	12 395	171 675	1 827 829
52	70 458	1 243	,01727	11 777	159 280	1 656 154
53	69 215	1 296	,01833	11 178	147 503	1 496 874
54	67 919	1 353	,01950	10 598	136 325	1 349 371
55	66 566	1 414	,02077	10 035	125 727	1 213 046
56	65 152	1 475	,02216	9 490,1	115 691,8	1 087 319,3
57	63 677	1 541	,02369	8 961,5	106 201,7	971 627,5
58	62 136	1 612	,02536	8 448,9	97 240,2	865 425,8
59	60 524	1 682	,02719	7 951,5	88 791,3	768 185,6
60	58 842	1 755	,02920	7 469,1	80 839,8	679 394,3
61	57 087	1 830	,03140	7 001,3	73 370,7	598 554,5
62	55 257	1 906	,03381	6 547,7	66 369,4	525 183,8
63	53 351	1 983	,03645	6 108,0	59 821,7	458 814,4
64	51 368	2 059	,03934	5 682,1	53 713,7	398 992,7
65	49 309	2 133	,04251	5 270,0	48 031,6	345 279,0
66	47 176	2 204	,04599	4 871,5	42 671,6	297 247,4
67	44 972	2 273	,04979	4 486,8	37 890,1	254 485,8
68	42 699	2 334	,05396	4 116,0	33 403,3	216 595,7
69	40 365	2 388	,05853	3 759,5	29 287,3	183 192,4
70	37 977	2 434	,06353	3 417,4	25 527,8	153 905,1
71	35 543	2 468	,06901	3 090,2	22 110,4	128 377,3
72	33 075	2 490	,07502	2 778,4	19 020,2	106 266,9
73	30 585	2 496	,08160	2 482,3	16 241,8	87 246,7
74	28 089	2 487	,08881	2 202,7	13 759,5	71 004,9
75	25 602	2 459	,09671	1 939,7	11 556,8	57 245,4
76	23 143	2 412	,10536	1 694,1	9 617,1	45 688,6
77	20 731	2 343	,11485	1 466,3	7 923,0	36 071,5
78	18 388	2 255	,12523	1 256,6	6 456,7	28 148,5
79	16 133	2 146	,13662	1 065,2	5 200,1	21 691,8
80	13 987	2 018	,14909	892,26	4 134,89	16 491,72
81	11 969	1 873	,16275	737,72	3 242,63	12 356,83
82	10 096	1 712	,17772	601,23	2 504,91	9 114,20
83	8 384	1 540	,19412	482,39	1 903,68	6 609,29
84	6 844	1 361	,21209	380,47	1 421,29	4 705,61
85	5 483	1 180	,23177	294,50	1 040,82	3 284,32
86	4 303	1 002	,25343	223,31	746,32	2 243,50
87	3 301	830	,27697	165,52	523,01	1 497,18
88	2 471	671	,30286	119,71	357,49	974,17
89	1 800	527	,33123	84,252	237,784	616,80
90	1 273	402	,36230	57,571	153,532	378,896
91	871	296	,39635	38,058	95,961	225,364
92	575	209	,43366	24,275	57,903	129,403
93	366	144	,47453	14,929	33,628	71,500
94	222	93	,51930	8,749	18,699	37,872
95	129	58	,56830	4,912	9,950	19,173
96	71	34	,62211	2,612	5,038	9,223
97	37	18	,68100	1,315	2,426	4,185
98	19	10	,74552	0,653	1,111	1,759
99	9	5	,81621	,296	0,458	0,648
100	4	3	,89366	,128	,159	,190
101	1	1	,97851	,031	,031	,031
102	0	...	∞	...	...	...

C_x	M_x	R_x	a_x	a_{xx}	a_{xxx}	A_x	x
197,91	6 788,01	116 652,80	14,172	11,096	9,320	0,52079	50
199,41	6 590,10	109 864,79	13,850	10,785	9,030	,53166	51
200,74	6 390,69	103 274,69	13,524	10,474	8,740	,54265	52
202,22	6 189,95	96 884,00	13,196	10,161	8,451	,55377	53
203,98	5 987,73	90 694,05	12,864	9,847	8,161	,56500	54
205,96	5 783,75	84 706,32	12,528	9,532	7,873	,57634	55
207,58	5 577,79	78 922,57	12,191	9,218	7,587	,58775	56
209,54	5 370,21	73 344,78	11,851	8,904	7,303	,59925	57
211,78	5 160,67	67 974,57	11,509	8,592	7,021	,61082	58
213,51	4 948,89	62 813,90	11,167	8,282	6,742	,62239	59
215,24	4 735,38	57 865,01	10,823	7,973	6,468	,63400	60
216,85	4 520,14	53 129,63	10,480	7,668	6,197	,64561	61
218,21	4 303,29	48 609,49	10,136	7,366	5,931	,65722	62
219,35	4 085,08	44 306,20	9,794	7,068	5,671	,66881	63
220,06	3 865,73	40 221,12	9,453	6,775	5,416	,68033	64
220,26	3 645,67	36 355,39	9,114	6,486	5,167	,69178	65
219,89	3 425,41	32 709,72	8,778	6,204	4,925	,70315	66
219,11	3 205,52	29 284,31	8,445	5,927	4,690	,71443	67
217,38	2 986,41	26 078,79	8,115	5,656	4,462	,72555	68
214,89	2 769,03	23 092,38	7,790	5,393	4,241	,73653	69
211,62	2 554,14	20 323,35	7,470	5,136	4,028	,74738	70
207,32	2 342,52	17 769,21	7,155	4,887	3,823	,75804	71
202,09	2 135,20	15 426,69	6,846	4,646	3,626	,76851	72
195,73	1 933,11	13 291,49	6,543	4,413	3,437	,77874	73
188,43	1 737,38	11 358,38	6,247	4,189	3,256	,78877	74
180,01	1 548,95	9 621,00	5,958	3,973	3,083	,79856	75
170,60	1 368,94	8 072,05	5,677	3,765	2,919	,80802	76
160,11	1 198,34	6 703,11	5,404	3,567	2,764	,81726	77
148,89	1 038,23	5 504,77	5,138	3,377	2,616	,82623	78
136,90	889,34	4 466,54	4,882	3,195	2,476	,83491	79
124,38	752,44	3 577,20	4,634	3,023	2,344	,84330	80
111,54	628,06	2 824,76	4,395	2,859	2,220	,85135	81
98,503	516,521	2 196,695	4,166	2,705	2,104	,85911	82
85,611	418,018	1 680,174	3,946	2,558	1,995	,86656	83
73,102	332,407	1 262,156	3,736	2,420	1,894	,87368	84
61,236	259,305	929,749	3,534	2,290	1,799	,88050	85
50,241	198,069	670,444	3,342	2,168	1,711	,88699	86
40,210	147,828	472,375	3,160	2,055	1,630	,89314	87
31,407	107,618	324,547	2,986	1,948	1,555	,89902	88
23,833	76,211	216,929	2,822	1,849	1,486	,90457	89
17,565	52,378	140,718	2,667	1,756	1,423	,90981	90
12,496	34,813	88,340	2,521	1,671	1.366	,91472	91
8,5251	22,3170	53,5272	2,385	1,594	1,315	,91935	92
5,6751	13,7919	31,2102	2,253	1,517	1,264	,92385	93
3,5412	8,1168	17,4183	2,137	1,455	1,225	,92773	94
2,1338	4,5756	9,3015	2,106	1,394	1,186	,93152	95
1,2086	2,4418	4,7259	1,929	1,347	1,157	,93480	96
0,6183	1,2332	2,2841	1,844	1,321	1,145	,93665	97
,3317	0,6149	1,0509	1,702	1 261	1,112	,94248	98
,1603	,2832	0,4360	1,533	1,202	1,086	,94816	99
,0930	,1229	,1528	1,242	1,060	1,015	,95803	100
,0299	,0299	,0299	...	...	...	,96618	101
...	...	...				...	102

Tafel III.

Werte der Funktion $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$

x	Φ(x)	Diff.	x	Φ(x)	Diff.	x	Φ(x)	Diff.
0,00	0,0000 000	112 833	0,40	0,4283 922	95 768	0,80	0,7421 010	59 023
0,01	0,0112 833	112 811	0,41	0,4379 690	94 986	0,81	0,7480 033	58 075
0,02	0,0225 644	112 766	0,42	0,4474 676	94 191	0,82	0,7538 108	57 130
0,03	0,0338 410	112 699	0,43	0,4568 867	93 384	0,83	0,7595 238	56 189
0,04	0,0451 109	112 609	0,44	0,4662 251	92 567	0,84	0,7651 427	55 253
0,05	0,0563 718	112 497	0,45	0,4754 818	91 737	0,85	0,7706 680	54 322
0,06	0,0676 215	112 362	0,46	0,4846 555	90 897	0,86	0,7761 022	53 396
0,07	0,0788 577	112 204	0,47	0,4937 452	90 046	0,87	0,7814 398	52 475
0,08	0,0900 781	112 025	0,48	0,5027 498	89 185	0,88	0,7866 873	51 559
0,09	0,1012 806	111 824	0,49	0,5116 683	88 316	0,89	0,7918 432	50 650
0,10	0,1124 630	111 600	0,50	0,5204 999	87 438	0,90	0,7969 082	49 746
0,11	0,1236 230	111 354	0,51	0,5292 437	86 550	0,91	0,8018 828	48 849
0,12	0,1347 584	111 087	0,52	0,5378 987	85 654	0,92	0,8067 677	47 958
0,13	0,1458 671	110 799	0,53	0,5464 641	84 751	0,93	0,8115 635	47 075
0,14	0,1569 470	110 489	0,54	0,5549 392	83 841	0,94	0,8162 710	46 198
0,15	0,1679 959	110 158	0,55	0,5633 233	82 924	0,95	0,8208 908	45 328
0,16	0,1790 117	109 806	0,56	0,5716 157	82 001	0,96	0,8254 236	44 467
0,17	0,1899 923	109 434	0,57	0,5798 158	81 071	0,97	0,8298 703	43 612
0,18	0,2009 357	109 041	0,58	0,5879 229	80 136	0,98	0,8342 315	42 766
0,19	0,2118 398	108 627	0,59	0,5959 365	79 196	0,99	0,8385 081	41 927
0,20	0,2227 025	108 193	0,60	0,6038 561	78 251	1,00	0,8427 008	41 097
0,21	0,2335 218	107 740	0,61	0,6116 812	77 302	1,01	0,8468 105	40 275
0,22	0,2442 958	107 267	0,62	0,6194 114	76 349	1,02	0,8508 380	39 462
0,23	0,2550 225	106 775	0,63	0,6270 463	75 394	1,03	0,8547 842	38 657
0,24	0,2657 000	106 263	0,64	0,6345 857	74 435	1,04	0,8586 499	37 861
0,25	0,2763 263	105 734	0,65	0,6420 292	73 473	1,05	0,8624 360	37 075
0,26	0,2868 997	105 185	0,66	0,6493 765	72 510	1,06	0,8661 435	36 297
0,27	0,2974 182	104 618	0,67	0,6566 275	71 545	1,07	0,8697 732	35 529
0,28	0,3078 800	104 034	0,68	0,6637 820	70 579	1,08	0,8733 261	34 769
0,29	0,3182 834	103 433	0,69	0,6708 399	69 611	1,09	0,8768 030	34 020
0,30	0,3286 267	102 814	0,70	0,6778 010	68 644	1,10	0,8802 050	33 280
0,31	0,3389 081	102 178	0,71	0,6846 654	67 676	1,11	0,8835 330	32 549
0,32	0,3491 259	101 526	0,72	0,6914 330	66 708	1,12	0,8867 879	31 828
0,33	0,3592 785	100 859	0,73	0,6981 038	65 742	1,13	0,8899 707	31 116
0,34	0,3693 644	100 175	0,74	0,7046 780	64 776	1,14	0,8930 823	30 415
0,35	0,3793 819	99 477	0,75	0,7111 556	63 811	1,15	0,8961 238	29 724
0,36	0,3893 296	98 763	0,76	0,7175 367	62 849	1,16	0,8990 962	29 042
0,37	0,3992 059	98 034	0,77	0,7238 216	61 888	1,17	0,9020 004	28 370
0,38	0,4090 093	97 292	0,78	0,7300 104	60 931	1,18	0,9048 374	27 709
0,39	0,4187 385	96 537	0,79	0,7361 035	59 975	1,19	0,9076 083	27 057

x	Φ(x)	Diff.	x	Φ(x)	Diff.	x	Φ(x)	Diff.
1,20	0,9103 140	26 415	1,70	0,9837 904	6 166	2,20	0,9981 372	872
1,21	0,9129 555	25 784	1,71	0,9844 070	5 958	2,21	0,9982 244	835
1,22	0,9155 339	25 162	1,72	0,9850 028	5 757	2,22	0,9983 079	799
1,23	0,9180 501	24 551	1,73	0,9855 785	5 561	2,23	0,9983 878	764
1,24	0,9205 052	23 949	1,74	0,9861 346	5 371	2,24	0,9984 642	731
1,25	0,9229 001	23 358	1,75	0,9866 717	5 186	2,25	0,9985 373	698
1,26	0,9252 359	22 777	1,76	0,9871 903	5 007	2,26	0,9986 071	668
1,27	0,9275 136	22 206	1,77	0,9876 910	4 832	2,27	0,9986 739	638
1,28	0,9297 342	21 645	1,78	0,9881 742	4 664	2,28	0,9987 377	609
1,29	0,9318 987	21 093	1,79	0,9886 406	4 499	2,29	0,9987 986	582
1,30	0,9340 080	20 552	1,80	0,9890 905	4 340	2,30	0,9988 568	556
1,31	0,9360 632	20 020	1,81	0,9895 245	4 186	2,31	0,9989 124	531
1,32	0,9380 652	19 498	1,82	0,9899 431	4 036	2,32	0,9989 655	507
1,33	0,9400 150	18 987	1,83	0,9903 467	3 892	2,33	0,9990 162	484
1,34	0,9419 137	18 485	1,84	0,9907 359	3 751	2,34	0,9990 646	461
1,35	0,9437 622	17 992	1,85	0,9911 110	3 615	2,35	0,9991 107	441
1,36	0,9455 614	17 510	1,86	0,9914 725	3 482	2,36	0,9991 548	420
1,37	0,9473 124	17 036	1,87	0,9918 207	3 355	2,37	0,9991 968	401
1,38	0,9490 160	16 573	1,88	0,9921 562	3 231	2,38	0,9992 369	382
1,39	0,9506 733	16 118	1,89	0,9924 793	3 111	2,39	0,9992 751	364
1,40	0,9522 851	15 673	1,90	0,9927 904	2 995	2,40	0,9993 115	347
1,41	0,9538 524	15 238	1,91	0,9930 899	2 883	2,41	0,9993 462	331
1,42	0,9553 762	14 811	1,92	0,9933 782	2 775	2,42	0,9993 793	315
1,43	0,9568 573	14 393	1,93	0,9936 557	2 664	2,43	0,9994 108	300
1,44	0,9582 966	13 984	1,94	0,9939 226	2 568	2,44	0,9994 408	286
1,45	0,9596 950	13 585	1,95	0,9941 794	2 469	2,45	0,9994 694	272
1,46	0,9610 535	13 194	1,96	0,9944 263	2 374	2,46	0,9994 966	260
1,47	0,9623 729	12 812	1,97	0,9946 637	2 283	2,47	0,9995 226	246
1,48	0,9636 541	12 483	1,98	0,9948 920	2 194	2,48	0,9995 472	235
1,49	0,9648 979	12 073	1,99	0,9951 114	2 109	2,49	0,9995 707	223
1,50	0,9661 052	11 716	2,00	0,9953 223	2 025	2,50	0,9995 930	213
1,51	0,9672 768	11 367	2,01	0,9955 248	1 947	2,51	0,9996 143	202
1,52	0,9684 135	11 027	2,02	0,9957 195	1 868	2,52	0,9996 345	192
1,53	0,9695 162	10 695	2,03	0,9959 063	1 795	2,53	0,9996 537	183
1,54	0,9705 857	10 370	2,04	0,9960 858	1 733	2,54	0,9996 720	173
1,55	0,9716 227	10 054	2,05	0,9962 581	1 654	2,55	0,9996 893	165
1,56	0,9726 281	9 745	2,06	0,9964 235	1 587	2,56	0,9997 058	157
1,57	0,9736 026	9 444	2,07	0,9965 822	1 522	2,57	0,9997 215	149
1,58	0,9745 470	9 150	2,08	0,9967 344	1 461	2,58	0,9997 364	141
1,59	0,9754 620	8 864	2,09	0,9968 805	1 400	2,59	0,9997 505	135
1,60	0,9763 484	8 585	2,10	0,9970 205	1 343	2,60	0,9997 640	127
1,61	0,9772 069	8 312	2,11	0,9971 548	1 288	2,61	0,9997 767	121
1,62	0,9780 381	8 048	2,12	0,9972 836	1 234	2,62	0,9997 888	115
1,63	0,9788 429	7 789	2,13	0,9974 070	1 183	2,63	0,9998 003	109
1,64	0,9796 218	7 538	2,14	0,9975 253	1 133	2,64	0,9998 112	103
1,65	0,9803 756	7 293	2,15	0,9976 386	1 086	2,65	0,9998 215	98
1,66	0,9811 049	7 055	2,16	0,9977 472	1 039	2,66	0,9998 313	93
1,67	0,9818 104	6 824	2,17	0,9978 511	994	2,67	0,9998 406	88
1,68	0,9824 928	6 598	2,18	0,9979 505	954	2,68	0,9998 494	84
1,69	0,9831 526	6 378	2,19	0,9980 459	913	2,69	0,9998 578	79

x	$\Phi(x)$	Diff.	x	$\Phi(x)$	Diff.	x	$\Phi(x)$
2,70	0,9998 657	75	3,20	0,9999 940	4	3,70	0,9999 9983 285
2,71	0,9998 732	71	3,21	0,9999 944	3	3,71	0,9999 9984 517
2,72	0,9998 802	67	3,22	0,9999 947	4	3,72	0,9999 9985 663
2,73	0,9998 870	63	3,23	0,9999 951	3	3,73	0,9999 9986 726
2,74	0,9998 933	61	3,24	0,9999 954	3	3,74	0,9999 9987 712
2,75	0,9998 994	57	3,25	0,9999 957	3	3,75	0,9999 9988 629
2,76	0,9999 051	54	3,26	0,9999 960	2	3,76	0,9999 9989 477
2,77	0,9999 105	51	3,27	0,9999 962	3	3,77	0,9999 9990 265
2,78	0,9999 156	48	3,28	0,9999 965	2	3,78	0,9999 9990 995
2,79	0,9999 204	46	3,29	0,9999 967	2	3,79	0,9999 9991 672
2,80	0,9999 250	43	3,30	0,9999 969	2	3,80	0,9999 9992 300
2,81	0,9999 293	41	3,31	0,9999 971	2	3,81	0,9999 9992 881
2,82	0,9999 334	38	3,32	0,9999 973	2	3,82	0,9999 9993 421
2,83	0,9999 372	37	3,33	0,9999 975	2	3,83	0,9999 9993 921
2,84	0,9999 409	34	3,34	0,9999 977	1	3,84	0,9999 9994 383
2,85	0,9999 443	33	3,35	0,9999 978	2	3,85	0,9999 9994 812
2,86	0,9999 476	31	3,36	0,9999 980	1	3,86	0,9999 9995 208
2,87	0,9999 507	29	3,37	0,9999 981	1	3,87	0,9999 9995 575
2,88	0,9999 536	27	3,38	0,9999 982	2	3,88	0,9999 9995 915
2,89	0,9999 563	26	3,39	0,9999 984	1	3,89	0,9999 9996 230
2,90	0,9999 589	24	3,40	0,9999 985	1	3,90	0,9999 9996 521
2,91	0,9999 613	23	3,41	0,9999 986	1	3,91	0,9999 9996 790
2,92	0,9999 636	22	3,42	0,9999 987	1	3,92	0,9999 9997 039
2,93	0,9999 658	21	3,43	0,9999 988	1	3,93	0,9999 9997 260
2,94	0,9999 679	19	3,44	0,9999 989	0	3,94	0,9999 9997 482
2,95	0,9999 698	18	3,45	0,9999 989		3,95	0,9999 9997 678
2,96	0,9999 716	17	3,46	0,9999 9900 780		3,96	0,9999 9997 860
2,97	0,9999 733	17	3,47	0,9999 9907 672		3,97	0,9999 9998 028
2,98	0,9999 750	15	3,48	0,9999 9914 101		3,98	0,9999 9998 183
2,99	0,9999 765	14	3,49	0,9999 9920 097		3,99	0,9999 9998 327
3,00	0,9999 779	14	3,50	0,9999 9925 691		4,0	0,9999 9998 458
3,01	0,9999 793	12	3,51	0,9999 9930 905		4,1	0,9999 9999 330
3,02	0,9999 805	12	3,52	0,9999 9935 766		4,2	0,9999 9999 714
3,03	0,9999 817	12	3,53	0,9999 9940 296		4,3	0,9999 9999 881
3,04	0,9999 829	10	3,54	0,9999 9944 519		4,4	0,9999 9999 951
3,05	0,9999 839	10	3,55	0,9999 9948 452		4,5	0,9999 9999 980
3,06	0,9999 849	10	3,56	0,9999 9952 115		4,6	0,9999 9999 992
3,07	0,9999 859	8	3,57	0,9999 9955 527		4,7	0,9999 9999 997
3,08	0,9999 867	9	3,58	0,9999 9958 703		4,8	0,9999 9999 999
3,09	0,9999 876	8	3,59	0,9999 9961 661			
3,10	0,9999 884	7	3,60	0,9999 9964 414			
3,11	0,9999 891	7	3,61	0,9999 9966 975			
3,12	0,9999 898	6	3,62	0,9999 9969 358			
3,13	0,9999 904	6	3,63	0,9999 9971 574			
3,14	0,9999 910	6	3,64	0,9999 9973 636			
3,15	0,9999 916	5	3,65	0,9999 9975 551			
3,16	0,9999 921	5	3,66	0,9999 9977 333			
3,17	0,9999 926	5	3,67	0,9999 9978 990			
3,18	0,9999 931	5	3,68	0,9999 9980 528			
3,19	0,9999 936	4	3,69	0,9999 9981 957			

SACH- UND NAMENREGISTER.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

Fisher, Dr. **Irving**, Professor an der Yale Universität zu New Haven, U. S. A., kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. ℳ 1.80.

Genocchi, Dr. **Angelo**, weil. Professor an der Universität Turin, Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung. Herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von Dr. G. Bohlmann in Berlin und A. Schepp, weil. Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von A. Mayer, Professor an der Universität Leipzig. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. ℳ 12.—

Helmert, Prof. Dr. **F. R.**, Direktor des Kgl. Preußischen Geodätischen Instituts und Zentralbureaus der internationalen Erdmessung, die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente. 2. Auflage. [XVIII u. 578 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. ℳ 16.—

Klein, Geh. Regierungsrat Dr. **F.**, Professor an der Universität Göttingen, autographierte Vorlesungshefte. 4. Geb.

Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Vorlesung, gehalten im Sommersemester 1894. Ausgearbeitet von E. Ritter. Göttingen 1894. Neuer unveränderter Abdruck. 1906. [IV u. 524 S.] ℳ 8 50.

Kowalewski, Dr. **G.**, Professor an der Universität Bonn, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Mit 31 Figuren. [VI u. 452 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. ℳ 12.—

—— Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Mit 18 Figuren. [IV u 126 S.] 8. 1908. Geh. n. ℳ 1.—, in Leinwand geb. ℳ 1.25.

Lüroth, Geh. Rat Dr. **J.**, Professor an der Universität Freiburg i. B., Vorlesungen über numerisches Rechnen. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1900. Geh. in Leinw. ℳ 8.—

Manes, Dr. **Alfred** in Berlin. Versicherungswesen. [XII u. 468 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geh. ℳ 9.40, geb. ℳ 10.—

Nielsen, Dr. **Niels**, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Lehrbuch der unendlichen Reihen. Vorlesungen, gehalten an der Universität Kopenhagen. [VIII u. 287 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 11.—, in Leinwand geb. ℳ 12.—

Pascals Repertorium der höheren Mathematik. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe. Unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausgegeben von P. Epstein, Professor an der Universität Straßburg i. E., und H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. 2 Bände in 4 Teilen mit zahlreichen Figuren. gr. 8. Geb.

I. Band: Analysis. Unter Mitwirkung von R. Fricke, Ph Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, E. Pascal, H. E. Timerding herausg. von P. Epstein. I Hälfte: Algebra, Differential- und Integralrechnung. [XV u. 527 S.] 1910. ℳ 10.— [Die II. Hälfte folgt im Sommer 1911.]

II. — Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler herausgegeben von H. E. Timerding. I. Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie. [XVI u. 534 S.] 1910. ℳ 10.— [Die II. Hälfte folgt im Sommer 1911.]

Pasch, Geheimer Hofrat Dr. **M.**, Professor an der Universität Gießen, Grundlagen der Analysis. Ausgearbeitet unter Mitwirkung von Clemens Thaer. [VI u. 140 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 3.60, in Leinwand geb. ℳ 4.—

—— Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Mit Figuren. [VII u. 188 S.] gr. 8. 1882. Geh. ℳ 3.20.

Petit-Bois, G., Bergingenieur in José bei Herve (Belgien), Tafeln unbestimmter Integrale. [XII u. 154 S.] 4. 1906. Geh ℳ 8.—

Pringsheim, Dr. **Alfred**, Professor an der Universität München, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. (Elementare Theorie der unendlichen Algorithmen und der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.) In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb. I. Band: Zahlenlehre. II. Band: Funktionenlehre. [In Vorbereitung.]

Reichel, Geh. Regierungsrat Dr. **Otto**, Professor an der Kgl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. ℳ 2.40.

Rothenberg, S., geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variablen Größen. [90 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 3.60.

Schlesinger, Dr. **Ludwig**, Professor an der Universität Klausenburg, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. gr. 8. Geh. ℳ 50.—, in Halbfranz geb. ℳ 56.—

I. Band. [XX u. 487 S.] 1895. Geh. ℳ 16.—, in Halbfranz geb. ℳ 18.—

II. —— I. Teil. Mit Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1897. Geh. ℳ 18.—, in Halbfranz geb. ℳ 20.—

II. —— II. —— Mit Figuren. [XIV u. 446 S.] 1898. Geh. ℳ 16.—, in Halbfranz geb. ℳ 18.—

—— Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Mit 6 Figuren. [X u. 334 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 10.—, in Leinwand geb. ℳ 11.—

—— Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. [IV u. 133 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 3.—

Schlömilch, Dr. **Oscar**, weil. Kgl. Sächsischer Geheimer Rat (vorher Professor an der Königlichen Technischen Hochschule zu Dresden). Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Mit Holzschnitten im Text. 2 Teile. gr. 8. In Leinwand geb. ℳ 18.—

I. Teil. Aufgaben aus der Differentialrechnung. 5. Auflage, bearbeitet von Dr. E. Naetsch, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. [VIII u. 372 S.] 1904. ℳ 8.—

II. —— Aufgaben aus der Integralrechnung. 4. Auflage, bearbeitet von Dr. R. Henke, Professor am Annen-Realgymnasium zu Dresden. [VIII u. 448 S.] 1900. ℳ 10.—

I. Teil. Mit Figuren. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. Geh. ℳ 8.—

II. —— Mit 26 Figuren. [X u. 431 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 12.—

Schoenflies, Dr. **A.**, Professor an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 2 Teile.

Schröder, Dr. **R.**, Direktor der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde, die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Für Schüler höherer Lehranstalten und Fachschulen sowie zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und 27 Figuren. [VII u. 131 S.] gr. 8. 1905. Kart. ℳ 1.60.

Seliwanoff, Dr. D., Professor an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. ℳ 4.—

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung neu bearbeitet von G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

- I. Band. Differentialrechnung. 4. u. 5. Auflage. Mit 70 Figuren. [XVI u. 639 S.] 1908. ℳ 13 —
- II. — Integralrechnung. 4. u. 5. Auflage. Mit 105 Figuren. [XIV u. 586 S.] 1911. ℳ 13.—
- III. — Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 3. Auflage. Mit 63 Figuren. [XII u. 658 S.] 1909. ℳ 13.—

Stolz, Dr. O., weil. Professor an der Universität Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 3 Teilen. gr. 8. Geh. ℳ 24.—, in Leinwand geb. ℳ 27.— Einzeln jeder Teil geh. ℳ 8.—, in Leinwand geb. ℳ 9.—

- I. Teil. Reelle Veränderliche und Funktionen. Mit 4 Fig. [X u. 460 S.] 1893.
- II. — Komplexe Veränderliche und Funktionen. Mit 33 Figuren. [IX u. 338 S.] 1896.
- III. — Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. Mit 41 Figuren. [VIII u. 296 S.] 1899.

— u. Dr. **J. A. Gmeiner**, Professor an der Universität Innsbruck, theoretische Arithmetik. 2., umgearb. Auflage ausgewählter Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. gr. 8.

- I. Abteilung. Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. 2., umgearbeitete Auflage der Abschnitte 1—4 des I. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. Mit 6 Figuren [IV u. 98 S.] 1900. Geh. ℳ 2.40, in Leinwand geb. ℳ 3.—
- II. — Die Lehre von den reellen und von den komplexen Zahlen. 2. umgearbeitete Auflage der Abschnitte 5—8, 10, 11 des I., und 1, 2, 5 des II. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. Mit 19 Figuren. [XI u. S. 99—402.] 1902. Geh. ℳ 7.20, in Leinwand geb. ℳ 8.—
- I. u. II. Abteilung in einen Band geb. ℳ 10.60.

Tesař, L., Professor an der k. k. Staatsrealschule im XX. Bezirke von Wien, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Mit 83 Figuren. [VIII u. 128 S.] gr. 8. 1906. Kart. ℳ 2.80.

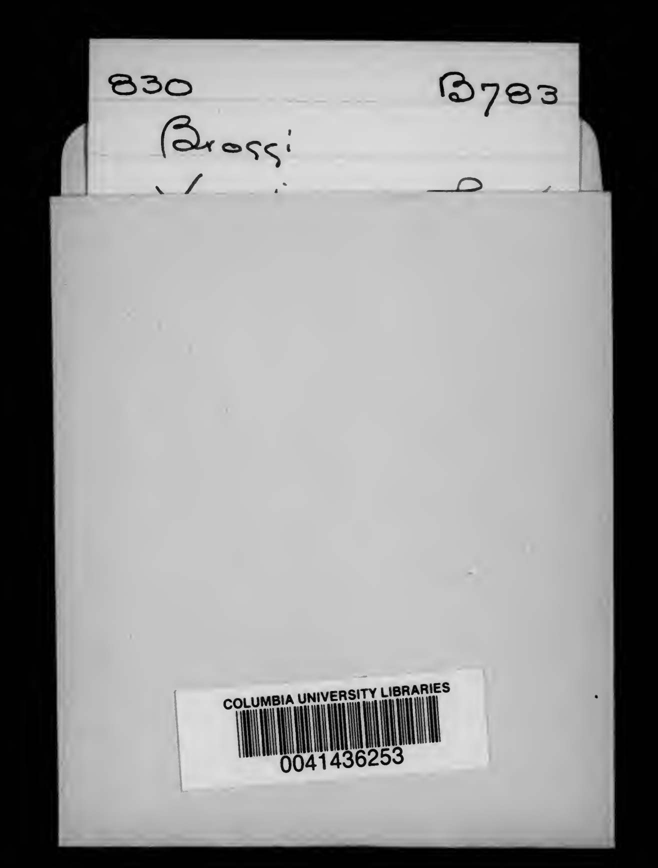
Thiele, Dr. T. N., em. Professor der Astronomie an der Universität Kopenhagen, Präsident des Vereins dänischer Aktuare, Interpolationsrechnung. [XII u. 175 S.] 4. 1909. Geh. ℳ 10.—

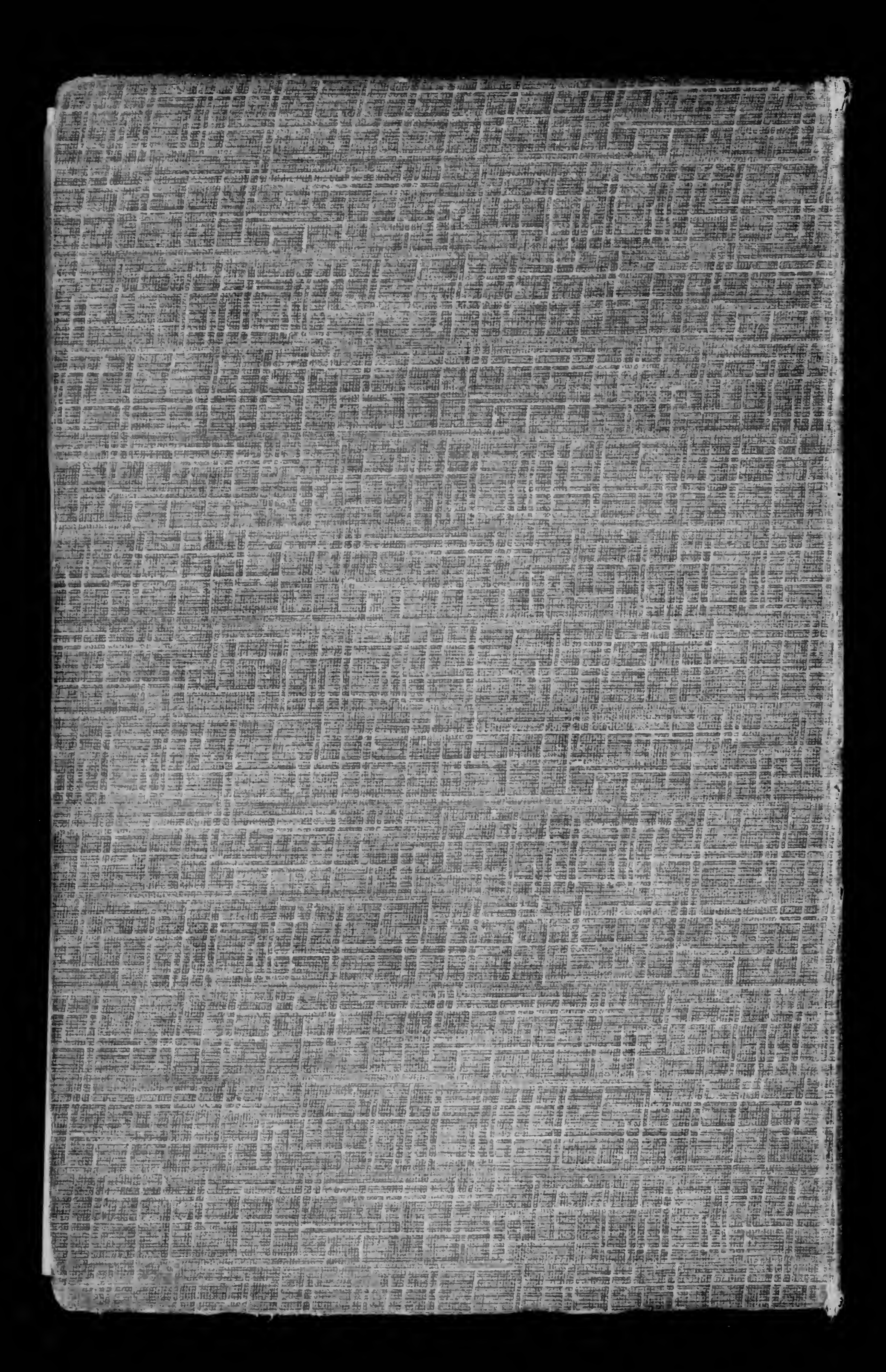
Weber, Dr. E. von, Professor an der Universität Würzburg, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. ℳ 24.—

Weber, Dr. H., u. Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

- I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. In Leinwand geb. ℳ 10.—.
- II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. In Leinwand geb. ℳ 12.—
- III. — Angewandte Elementar-Mathematik. 2. Auflage. I. Teil: Mathematische Physik. Mit einem Buch über Maxima und Minima von H. Weber und J. Wellstein. Bearbeitet von R. H. Weber, Professor in Rostock. Mit 254 Figuren. [XII u. 536 S.] 1910. ℳ 12.—. II. Teil [In Vorbereitung.]

Date Due





END OF
TITLE